



Université libre de Bruxelles
Faculté des Sciences

Modèle Seesaw Type-I et processus rares
violant la saveur leptonique

Mikaël DHEN

Mémoire de fin d'études
Directeur de mémoire : Thomas HAMBYE

Année académique 2010-2011

En préambule à ce mémoire, je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette année universitaire.

Je tiens à remercier sincèrement Thomas Hambye, qui, en tant que Directeur de mémoire, s'est toujours montré à l'écoute et très disponible tout au long de l'année, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour. Je tiens aussi à remercier mes lecteurs Michel Tytgat et Laurent Favart.

Pour leurs aides, soutiens et conseils, merci à toute ma famille ainsi qu'à mes proches :

Natchy Boumba
Grégoire de Kiarolis
Angelika Francis
Jean-Philippe Domickx
Maxime Julian
Jérôme Berardo
Fanny Hégillou
Tony Masson
Frédérique Vincent
Xavier Dereux
Selim Dyson
Roch Berthold
Jonathan Poleur
Dimitri Rombois

Sans oublier tous mes camarades de physique, auxquels je tiens à souhaiter une bonne et heureuse continuation.

Table des matières

Introduction	1
1 Généralités sur les neutrinos	3
1.1 Contexte expérimental et théorique	3
1.1.1 Les neutrinos dans le Modèle Standard	3
1.1.2 Oscillations des neutrinos	6
1.1.3 Contraintes actuelles sur les paramètres de mélange	8
1.1.4 Expériences à venir	10
1.1.5 Contraintes actuelles sur les masses des neutrinos	11
1.2 Comment donner une masse aux neutrinos?	14
1.2.1 Masse de Dirac, de Majorana et masses dans le Modèle Standard	14
1.2.2 Introduction de singlets fermioniques : Seesaw Type-I	15
1.2.3 Introduction de triplets scalaires : Seesaw Type-II	17
1.2.4 Introduction de triplets fermioniques : Seesaw Type-III	17
2 Seesaw Type-I : Lagrangien de haute énergie et Lagrangien effectif	19
2.1 Lagrangien général	19
2.2 Phénoménologie	25
2.2.1 Expressions des rapports de branchement des processus $l \rightarrow l'\gamma$, $l \rightarrow l'l'$, $\mu - e$ conversion	25
2.2.2 Limites expérimentales	27
2.3 Lagrangien effectif	28
2.4 Reconstruction du Lagrangien complet à partir du Lagrangien effectif	32
2.5 Conclusion du chapitre 2	38
3 Étude de modèles minimaux	41
3.1 Motivations	41
3.2 Modèles avec deux neutrinos droits	43

3.2.1	Introduction	43
3.2.2	Analyse du modèle Minimal Flavor Violation, cas où $\mu = \mu' = 0$	44
3.2.3	Analyse du modèle Minimal Flavor Violation - cas général	52
3.2.4	Conclusion sur le modèle Minimal Flavor Violation	55
3.2.5	Most Minimal Flavor Violation (MMFV)	56
3.2.6	Autres modèles	60
3.2.7	Conclusion sur les modèles minimaux	63
3.3	Modèle avec trois neutrinos droits	64
4	Conclusion et perspectives	69
	Annexes	76
A	Conjugaison de charge	76
B	Diagrammes de Feynman des processus $l \rightarrow l'\gamma$, $l \rightarrow l'l'l'$ et $\mu N - e N$	77
C	Expressions des facteurs de formes	78
D	Relations trigonométriques	81
	Table des figures	81
	Liste des tableaux	83

Introduction

Le modèle standard des particules élémentaires constitue la plus belle et la plus impressionnante des avancées de la physique moderne. Il a été construit briques par briques sur plusieurs dizaines d'années, grâce aux efforts conjugués des maçons et des architectes, des expériences et des théories. Cette cathédrale réunit trois des quatre forces fondamentales occurrentes dans la nature : la force forte, la force faible et la force électromagnétique. Les briques sont les particules élémentaires constituant la matière, les quarks et les leptons, et le ciment les particules d'interaction, les bosons de jauge. L'ensemble est maintenu par une clé de voûte constituée des notions de symétries de Lorentz et de jauge : la théorie quantique des champs. Mais tout comme Notre Dame, on sait que le monument n'est pas terminé, il lui manque ses flèches.

En effet, bien que décrivant excellemment bien les résultats expérimentaux sur une large fourchette d'énergie, le modèle standard semble n'être qu'une théorie effective, c'est-à-dire une image à basse énergie d'une théorie encore à découvrir, ou du moins à confirmer expérimentalement. Plusieurs indices en témoignent. Citons par exemple l'impossibilité d'y intégrer l'interaction gravitationnelle, la quantification de la charge électrique, l'absence de matière noire, l'absence d'explication pour les valeurs des masses et des paramètres de mélange des fermions, et surtout l'absence de masse pour les neutrinos. Ce dernier point est clairement en contradiction avec les résultats de récentes expériences, qui ont prouvé l'existence d'une très faible masse pour ces derniers par le biais des oscillations entre saveurs de neutrinos. Mais pourquoi est-elle si faible par rapport aux autres particules ? Six ordres de grandeurs la séparent de la masse de l'électron, douze de la masse du quark top. Un tel écart ouvre la voie à une nouvelle physique...

Pour pallier ces faiblesses, des théories ont vu le jour comme les théories de Grande Unification $SU(5)$ et $SO(10)$, la supersymétrie ou encore la théorie des cordes, dans lesquelles nous ne nous aventurerons pas dans ce mémoire. Par contre, la faible masse des neutrinos peut être générée naturellement à partir de mécanismes spécifiques, les modèles Seesaw, qui trouvent une explication logique dans ces théories de Grande Unification. Extensions minimales du Modèle Standard, on recense trois types de modèles Seesaw suivant qu'on ajoute des neutrinos singlets de chiralité droite (Type-I), des triplets

scalaires (Type-II) ou des triplets fermioniques (Type-III)¹. Ce mémoire est axé sur le modèle Seesaw Type-I favori.

Ces modèles bénéficient de caractéristiques séduisantes. Non seulement ils génèrent une faible masse des neutrinos, mais ils peuvent aussi expliquer l'asymétrie matière-antimatière de l'univers, via le mécanisme de "leptogenèse". De plus, la théorie est renormalisable, le groupe de jauge est le même que le Modèle Standard et ils ouvrent la voie à une nouvelle physique. Mais leur principal inconvénient est qu'ils sont difficilement testables.

En effet, la connaissance des masses et des paramètres de mélange des neutrinos ne suffit pas pour tester ces modèles. Il faut avoir accès à d'autres processus prédits par ceux-ci, tels que la désintégration $\mu \rightarrow e \gamma$ et la conversion d'un muon en électron dans un atome de Titane par exemple. La mesure de ces rapports de branchement constituerait un excellent test pour ces modèles. Cependant, le modèle Seesaw Type-I prédit en général une tellement faible probabilité d'observer ces processus qu'ils sont dès lors hors de portée des dispositifs expérimentaux actuels et à venir. Toutefois, l'adjonction d'une structure particulière au modèle permet de changer considérablement la donne. C'est dans ce contexte que sont apparus les modèles Seesaw Inverses². Ce mémoire a pour but l'analyse de modèles Seesaw Inverses minimaux et leurs prédictions.

Nous commencerons dans le chapitre 1 par introduire la place qu'occupe le neutrino dans le Modèle Standard ainsi que la situation expérimentale actuelle sur leur masse et les oscillations entre saveurs. Nous y introduirons aussi les différents modèles Seesaw. Dans le chapitre 2 sera abordé l'analyse à hautes et basses énergies du modèle général Seesaw Type-I sur lequel est centré ce mémoire. Ensuite, nous appliquerons les méthodes obtenues à l'étude de modèles minimaux dans le chapitre 3. Nous terminerons enfin par une conclusion.

Sauf mention contraire, nous prendrons $c = 1$ et $\hbar = 1$. De sorte que :

$$\begin{aligned} 1 \text{ kg} &= 5.608 \cdot 10^{26} \text{ GeV} \\ 1 \text{ cm} &= 5.068 \cdot 10^{13} \text{ GeV}^{-1} \\ 1 \text{ s} &= 1.519 \cdot 10^{24} \text{ GeV}^{-1} \end{aligned}$$

1. Il est bien évidemment possible d'envisager des modèles mélangeant plusieurs types de Seesaw.

2. Ils ne sont de plus pas forcément incompatibles avec la leptogenèse, bien que conservant approximativement le nombre leptonique.

1 Généralités sur les neutrinos

1.1 Contexte expérimental et théorique

1.1.1 Les neutrinos dans le Modèle Standard

Depuis l'hypothèse de son existence par Wolfgang Pauli en 1930, le neutrino n'a cessé de passionner. Le "remède désespéré" afin de sauver le principe de conservation de l'énergie est une particule de charge électrique nulle, supposée de spin 1/2, et qui semble dépourvue de masse. C'est Enrico Fermi qui lui donnera son nom actuel en l'incorporant dans sa théorie de l'interaction faible. Mais les neutrinos interagissent si faiblement qu'il faudra attendre des années avant d'avoir la preuve de leur existence. C'est en 1956 que l'antineutrino électronique est découvert expérimentalement par F. Reines, C. Cowan, F. B. Harrison, H. W. Kruse, et A. D. McGuire auprès du réacteur nucléaire de Hanford [1]. Depuis lors, on doit la découverte du neutrino muonique en 1962 à Brookhaven à L. M. Lederman, M. Schwartz et J. Steinberger [2], et la découverte du neutrino tauique en 2000 au Fermilab à la collaboration de l'expérience DONUT [3], permettant ainsi de compléter les trois familles, les trois saveurs de leptons. Expérimentalement, le nombre de neutrinos légers a pu être déterminé en combinant les données des expériences ALEPH, DELPHI, L3, et OPAL sur la section efficace d'annihilation de $e^+ - e^-$ près du pic du Z. L'ajustement des données est en accord avec $N_\nu = 2.92 \pm 0.05$ familles de neutrinos légers ($m_\nu < \frac{M_Z}{2}$) [4].

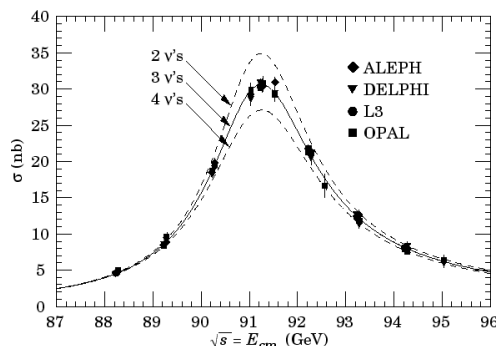


FIGURE 1.1 – Détermination du nombre de neutrinos légers à partir de la largeur de désintégration du boson Z.

Le neutrino trouve sa place dans le Modèle Standard de la physique des particules. Élaboré entre 1960 et 1975, celui-ci décrit les interactions fortes, faibles et électromagnétiques dans le cadre de la théorie quantique des champs. Le groupe de symétrie de jauge du Modèle Standard est $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, et les constantes de couplage associées sont désignées par g_S , g et g' . Chaque groupe possède ces générateurs qui donnent naissance aux gluons \mathcal{G} pour $SU(3)_c$, aux bosons \mathcal{W} pour $SU(2)_L$ et au boson \mathcal{B} pour $U(1)_Y$. Afin de donner une masse aux champs d'interaction et de matière, le mécanisme de Brout-Englert-Higgs propose d'introduire un doublet scalaire ϕ . La densité lagrangienne du Modèle Standard avant brisure de la symétrie de jauge $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{em}$ s'exprime comme :

$$\mathcal{L}_{SM} = \mathcal{L}_{jauge}^{KE} + \mathcal{L}_{quarks}^{KE} + \mathcal{L}_{leptons}^{KE} + \mathcal{L}_{BEH}^{SB} + \mathcal{L}_{quarks}^{SB} + \mathcal{L}_{leptons}^{SB} \quad (1.1)$$

où :

$$\mathcal{L}_{jauge}^{KE} = -\frac{1}{4}\mathcal{G}_a^{\mu\nu}\mathcal{G}_{\mu\nu a} - \frac{1}{4}\mathcal{W}_b^{\mu\nu}\mathcal{W}_{\mu\nu b} - \frac{1}{4}\mathcal{B}^{\mu\nu}\mathcal{B}_{\mu\nu} \quad (1.2)$$

$$\mathcal{L}_{quarks}^{KE} = \sum_{\text{saveurs}} \sum_{\text{couleurs}} i\bar{Q}_L \not{D} Q_L + i\bar{u}_R \not{D} u_R + i\bar{d}_R \not{D} d_R \quad (1.3)$$

$$\mathcal{L}_{leptons}^{KE} = \sum_{\text{saveurs}} i\bar{L}_L \not{D} L_L + i\bar{e}_R \not{D} e_R \quad (1.4)$$

$$\mathcal{L}_{BEH}^{SB} = (D^\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) + \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (1.5)$$

$$\mathcal{L}_{quarks}^{SB} = - \sum_{\text{saveurs}} \sum_{\text{couleurs}} \bar{Q}_L \tilde{\phi} Y_u u_R + \bar{Q}_L \phi Y_d d_R + h.c. \quad (1.6)$$

$$\mathcal{L}_{leptons}^{SB} = - \sum_{\text{saveurs}} \bar{L}_L \phi Y_e e_R + h.c. \quad (1.7)$$

où $Q_L = (u_L \ d_L)^T$, $L_L = (\nu_L \ e_L)^T$, et $\not{D} = \gamma^\mu D_\mu$ est la dérivée covariante. $\psi_L = P_L \psi$ et $\psi_R = P_R \psi$ désignent les composantes chirales respectivement gauche et droite du spineur de Dirac ψ , les Y_i sont les matrices de Yukawa, et $\tilde{\phi} = i\sigma_2 \phi^*$ où σ_2 est la matrice de Pauli. A ce stade, les six quarks et les six leptons sont des états propres de saveur et aucune interaction violant la saveur n'est permise. Par sa valeur dans le vide (vev), $\langle \phi \rangle = \mu/\sqrt{2\lambda} = v/\sqrt{2}$ où $v = 246$ GeV, le champ ϕ brise la symétrie $SU(2)_L \times U(1)_Y$ en $U(1)_{em}$ et génère la masse des bosons W^+ , W^- et Z ainsi que des champs de matière tout en laissant le photon et les neutrinos sans masse. En effet, le photon est le boson de Goldstone associé à la symétrie résiduelle $U(1)_{em}$. Par contre, l'absence de masse pour les neutrinos est une exigence dans le Modèle Standard. Effectivement, on a expressément omis d'y introduire des neutrinos droits ν_R , vu qu'ils n'ont jamais été observés.

En bref, dans le secteur de Yukawa des quarks, la brisure de symétrie engendre deux matrices de masse 3×3 des quarks : $\frac{v}{\sqrt{2}} Y_u^{ij}$ et $\frac{v}{\sqrt{2}} Y_d^{ij}$ où $i, j = 1, 2, 3$ désignent les trois familles. La diagonalisation de ces dernières par des matrices unitaires $V_{L,R}^u$ et

$V_{L,R}^d$ définit les états propres de masse des quarks, qui sont des états purs, i.e. ils ne se mélangent pas. Dans cette nouvelle base, des interactions par courant chargé changeant la saveur des quarks sont permises et caractérisées par la matrice unitaire de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa U_{CKM} , dont la paramétrisation standard est :

$$U_{CKM} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

avec $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ et $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$. La matrice possède trois angles de mélange et une phase δ , liée à la violation de CP. Le changement de saveur dans le domaine des quarks constitue maintenant une évidence expérimentale et les mesures actuelles les plus précises donnent [5] : $\theta_{12} = 13.09 \pm 0.14^\circ$, $\theta_{13} = 0.22 \pm 0.02^\circ$, $\theta_{23} = 2.36 \pm 0.06^\circ$, et $\delta = 62 \pm 10^\circ$.

Par contre, dans le secteur des leptons, l'absence de masse pour les neutrinos ne permet pas de reproduire le même scénario. En effet, la matrice de masse des leptons après brisure de symétrie est $\frac{v}{\sqrt{2}}Y_e^{ij}$. La diagonalisation de cette dernière par deux matrices unitaires $V_{L,R}^e$ ne modifie pas la physique, puisqu'on a la liberté de redéfinir les neutrinos gauches afin d'absorber ce changement de base, vu qu'ils n'ont pas de masse. Il y a donc absence de mélange de saveur leptonique dans le Modèle Standard.

Une conséquence de cette discussion est que la densité lagrangienne du Modèle Standard après brisure de symétrie possède par construction les symétries globales $U(1)_B$, $U(1)_L$, $U(1)_e$, $U(1)_\mu$ et $U(1)_\tau$. Par le théorème de Noether, chaque symétrie possède sa loi de conservation, respectivement : la conservation du nombre baryonique B , leptonique L , électronique L_e , muonique L_μ et tauique L_τ . La conservation du nombre leptonique est une conséquence des trois dernières. Expérimentalement, un signe de la non-conservation du nombre baryonique ou du nombre leptonique serait la désintégration du proton, dont le temps de vie est au minimum de $2.1 \cdot 10^{29}$ années [4].

Cependant, la conservation de la saveur leptonique semble artificielle. En effet, rien n'empêche d'introduire des neutrinos droits afin de donner une masse aux neutrinos... C'est notamment ce qu'envisagea B. Pontecorvo en 1957, qui imagina une masse faible mais non nulle pour le neutrino électronique, avec pour conséquence une oscillation $\nu_e \leftrightarrow \bar{\nu}_e$ similaire aux oscillations des kaons neutres $K_0 \leftrightarrow \bar{K}_0$. Peu après la découverte du neutrino muonique, Maki, Nakagawa et Sakata suggéreront en 1962 les oscillations $\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$ entre saveurs de neutrinos. De plus, les théories attractives de Grande Unification, telle que celle basée sur le groupe $SO(10)$, prédisent l'existence de neutrinos droits, et donc de masse pour les neutrinos.

1.1.2 Oscillations des neutrinos

La découverte en 1998 de l'oscillation de neutrinos muoniques par la collaboration Super-Kamiokande au Japon [6] confirme brillamment l'existence d'une masse pour les neutrinos. Ils ont détecté un déficit de neutrinos muoniques, provenant des interactions des rayons cosmiques avec la haute atmosphère, par rapport aux prédictions. Cette découverte majeure a ouvert la voie à de nouvelles expériences comme SNO, KAMLAND et K2K qui mettront en évidence les oscillations des neutrinos provenant respectivement du soleil en 2001 [7], de réacteurs nucléaires en 2002 [8] et dans les faisceaux produits par les accélérateurs en 2003 [9]. Comme conséquences, au moins deux des trois neutrinos doivent posséder une masse, et la saveur leptonique est violée. Avant d'analyser les différents moyens de donner une masse aux neutrinos, regardons brièvement en quoi celle-ci implique l'oscillation.

Une oscillation survient si la matrice de masse des neutrinos est non diagonale dans la base des saveurs, i.e. la base des neutrinos partenaires des leptons chargés e , μ et τ dans leurs interactions avec le boson W . En effet, si cette matrice de masse est non diagonale, la relation entre états propres de saveur $|\nu_i\rangle$ (où $i = e, \mu, \tau$) et de masse $|\nu_\alpha\rangle$ (où $\alpha = 1, 2, 3$) peut s'écrire en toute généralité :

$$\begin{pmatrix} |\nu_e\rangle \\ |\nu_\mu\rangle \\ |\nu_\tau\rangle \end{pmatrix} = U_{PMNS} \begin{pmatrix} |\nu_1\rangle \\ |\nu_2\rangle \\ |\nu_3\rangle \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

où U_{PMNS} est la matrice unitaire de Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (PMNS). Comme la matrice CKM, la paramétrisation standard de la matrice PMNS est :

$$\begin{aligned} U_{PMNS} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\alpha_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} U_{ph}^{Maj} \quad (1.10) \end{aligned}$$

où $s_{ij} = \sin\theta_{ij}$ et $c_{ij} = \cos\theta_{ij}$. La matrice possède trois angles de mélange, $\theta_{23} \equiv \theta_{\text{atm}}$, $\theta_{12} \equiv \theta_{\text{sol}}$ et θ_{13} ainsi qu'une phase δ liée à la violation de CP. De plus, si les neutrinos sont de type Majorana, on remarque l'apparition d'une matrice de phases de Majorana U_{ph}^{Maj} (voir annexes A). Comme les $|\nu_\alpha\rangle$ sont des états propres de masse, leur propagation est donnée par une solution sous forme d'onde plane :

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = e^{-iE_\alpha t} |\nu_\alpha\rangle \quad ; \quad E_\alpha = \sqrt{\mathbf{p}_\alpha^2 + m_\alpha^2} \quad (1.11)$$

où $|\nu_\alpha(t=0)\rangle = |\nu_\alpha\rangle$. La propagation des états propres de saveur est donc donnée par :

$$|\nu_i(t)\rangle = \sum_{\alpha=1,2,3} U_{i\alpha} e^{-iE_\alpha t} |\nu_\alpha\rangle \quad (1.12)$$

Nous écrivons temporairement U la matrice U_{PMNS} . La probabilité de trouver un neutrino ν_j après un temps t vaut :

$$\begin{aligned} P_{\nu_i\nu_j}(t) &= |\langle\nu_j|\nu_i(t)\rangle|^2 = \left| \sum_{\alpha,\beta} \langle\nu_\beta|U_{\beta j}^\dagger U_{i\alpha} e^{-iE_\alpha t} |\nu_\alpha\rangle \right|^2 \\ &= \left| \sum_{\alpha} U_{j\alpha}^* U_{i\alpha} e^{-iE_\alpha t} \right|^2 \\ &= \sum_{\alpha,\beta} |U_{i\alpha} U_{j\alpha}^* U_{i\beta}^* U_{j\beta}| \cos [(E_\alpha - E_\beta)t - \varphi_{ij\alpha\beta}] \end{aligned} \quad (1.13)$$

avec $\varphi_{ij\alpha\beta} = \arg(U_{i\alpha} U_{j\alpha}^* U_{i\beta}^* U_{j\beta})$. Comme la masse des neutrinos est supposée très petite, on peut faire l'approximation suivante :

$$E_\alpha \approx |\mathbf{p}_\alpha| + \frac{m_\alpha^2}{2|\mathbf{p}_\alpha|} \quad (1.14)$$

De plus, on assume que le moment \mathbf{p} est le même partout dans le faisceau, c'est-à-dire $|\mathbf{p}_\alpha| = |\mathbf{p}_\beta| = |\mathbf{p}|$. On réexprime alors la probabilité en fonction de la distance $L = t$:

$$P_{\nu_i\nu_j}(L) \approx \sum_{\alpha,\beta} |U_{i\alpha} U_{j\alpha}^* U_{i\beta}^* U_{j\beta}| \cos \left[\frac{\Delta m_{\alpha\beta}^2}{2E} L - \varphi_{ij\alpha\beta} \right] \quad (1.15)$$

où $\Delta m_{\alpha\beta}^2 = m_\alpha^2 - m_\beta^2$. Supposons pour simplifier la matrice U_{PMNS} réelle, i.e. $\delta = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ et donc $\varphi_{ij\alpha\beta} = 0$. Alors (1.15) peut encore s'écrire [10] :

$$P_{\nu_i\nu_j}(L) = \delta_{ij} - 4 \sum_{\alpha>\beta} U_{i\alpha} U_{j\alpha} U_{i\beta} U_{j\beta} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{\alpha\beta}^2}{4E} L \right) \quad (1.16)$$

Pour $j = i$ on obtient la probabilité de survie $P_i^{surv}(L)$ de l'espèce i , et pour $j \neq i$ on obtient la probabilité de conversion P_{ij}^{conv} de l'espèce i en j . On distingue alors deux cas importants du point de vue expérimental :

- $(\Delta m_{21}^2/2E)L \ll 1$. Dans ce cas, comme $m_{31}^2 \approx m_{32}^2$, (1.16) s'écrit :

$$P_{\nu_i\nu_j}(L) = \delta_{ij} - 4U_{i3}U_{j3}(\delta_{ij} - U_{i3}U_{j3}) \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{4E} L \right) \quad (1.17)$$

A titre d'exemple, en utilisant (1.10) :

$$P_{\nu_e}^{surv}(L) = 1 - \sin^2 2\theta_{13} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{31}^2}{4E} L \right) \quad (1.18)$$

- $\underline{(\Delta m_{32}^2/2E)L \gg 1}$ et $\underline{(\Delta m_{31}^2/2E)L \gg 1}$. (1.16) s'écrit alors :

$$P_{\nu_i \nu_j}(L) = \delta_{ij} - 2U_{i3}U_{j3}(\delta_{ij} - U_{i3}U_{j3}) - 4U_{i1}U_{j1}U_{i2}U_{j2} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2}{4E} L \right) \quad (1.19)$$

A titre d'exemple, en utilisant (1.10) :

$$P_{\nu_e}^{surv}(L) = \cos^4 \theta_{13} \left[1 - \sin^2 2\theta_{12} \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2}{4E} L \right) \right] + \sin^4 \theta_{13} \quad (1.20)$$

Nous allons exposer dans les sections suivantes les différents résultats expérimentaux sur paramètres de mélange et la masse des neutrinos.

1.1.3 Contraintes actuelles sur les paramètres de mélange

Il y a principalement quatre sources utilisées pour l'étude des oscillations de neutrinos. On distingue les neutrinos provenant du soleil, de la haute atmosphère, des réacteurs nucléaires et des accélérateurs. Les distances variées entre ces sources et les détecteurs ainsi que le spectre d'énergie des neutrinos émis permettent la mesure de plusieurs angles de mélange, comme le montre les équations (1.18) et (1.20). Le dispositif expérimental est généralement conçu de manière à détecter la probabilité de survie et/ou la probabilité de conversion d'une certaine espèce de neutrino. Historiquement, la première évidence expérimentale des oscillations de neutrinos fut mesurée au détecteur Super-Kamiokande en 1998, au Japon, où on a détecté un déficit de neutrinos atmosphériques ν_μ par rapport aux prédictions. Les neutrinos atmosphériques y étaient et y sont encore détectés via leur interaction par courant chargé avec un noyau parmi les 50 mille tonnes d'eau du détecteur : $\nu + N \rightarrow l + X$. La comparaison du flux de neutrinos observés avec le flux attendu et sa dépendance en l'angle par rapport au zenith (et donc en la distance L) montre un net déficit de ν_μ . Celui-ci est explicable par une oscillation $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_\tau$ entre deux saveurs de neutrinos avec $\sin^2 2\theta_{atm} > 0.82$ et $5 \times 10^{-4} < \Delta m_{atm}^2 < 6 \times 10^{-3} \text{eV}^2$ [6], où $\theta_{atm} \equiv \theta_{23}$ et $\Delta m_{atm}^2 \equiv \Delta m_{32}^2$ (les ν_τ n'étant pas observables par ce détecteur). Depuis lors, de nombreuses expériences sur les neutrinos atmosphériques telles que MINOS (accélérateur), IBM, MACRO ou encore K2K ont permis un affinement des valeurs des paramètres θ_{atm} et Δm_{atm}^2 . Les valeurs actuelles résultant d'un fit global sont reprises en (1.23) et (1.25).

Les réactions nucléaires au sein du soleil émettant principalement des neutrinos électroniques, les expériences sur les neutrinos solaires comme SNO, GNO, GALLEX ou encore Super-Kamiokande, combinées aux résultats de l'expérience sur les oscillations de neutrinos électroniques ν_e provenant de réacteurs à KAMLAND, ont permis une évaluation de l'angle $\theta_{sol} \equiv \theta_{12}$ et de $\Delta m_{sol}^2 \equiv \Delta m_{21}^2$ au travers des oscillations $\nu_e \leftrightarrow \nu_{\mu,\tau}$. Les meilleures valeurs actuelles sont reprises en (1.21) et (1.24). Il ne manque alors plus que la connaissance du dernier angle de mélange θ_{13} , des phases de Majorana α_i et de la phase δ .

Comme $\Delta m_{21}^2 \ll 1 \text{ eV}^2$, on voit à partir de (1.18) que θ_{13} est le mieux mesurable pour $\Delta m_{31}^2 L/4E = \pi/2$. Or, les réacteurs nucléaires sont de grandes sources de neutrinos électroniques ν_e , et les énergies des neutrinos qu'ils émettent montre qu'il faut une courte distance L pour optimiser l'observation d'oscillations. Citons par exemple les expériences Chooz, Palo Verde, Bugey et KamLAND (situé toutefois à une plus grande distance L des réacteurs), qui ont fourni des bornes supérieures sur la valeur de θ_{13} .

La meilleure borne supérieure actuelle sur θ_{13} a été fournie par l'expérience Chooz en 1999 [11] et, conjuguée avec l'expérience Palo Verde, vaut $\sin^2(2\theta_{13}) < 0.15$ à 90% C.L.¹ pour $\Delta m_{31}^2 = 2.4 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$. Cependant, un article [12] a récemment publié les résultats de nouveaux calculs sur le spectre des antineutrinos émis par les réacteurs. Ils ont conclu à une augmentation moyenne systématique de 3% sur le flux d'antineutrinos émis. Or, les résultats des expériences comme Chooz, Palo Verde et KamLAND sont basés sur l'estimation du flux de neutrinos émis par les réacteurs, qu'ils comparent ensuite aux observations. Cette augmentation du flux a donc une influence directe sur leurs résultats.

En ne combinant que les résultats provenant des expériences Chooz et KamLAND, une récente étude [13] a conclu à une nouvelle borne, moins contraignante, sur l'angle de mélange θ_{13} : $\sin^2(2\theta_{13}) < 0.22$ à 90% C.L. pour $\Delta m_{31}^2 = 2.4 \times 10^{-3} \text{ eV}^2$. Une analyse complète des résultats provenant de l'ensemble des expériences sur l'angle θ_{13} a été effectuée dans [14]. On y trouve $\sin^2(2\theta_{13}) < 0.14$ à 3σ ($\sim 99.7\%$ C.L.) pour le fit global, i.e. en tenant compte des résultats provenant des expériences Chooz, Palo Verde, KamLAND, MINOS, des expériences sur les neutrinos solaires et atmosphériques ainsi que les expériences sur des oscillations de très courtes distances ($< 100 \text{ m}$), dénomées par SBL (Short-Baseline).

Cependant, alors que les résultats des expériences SBL, Chooz et Palo Verde n'étaient au départ en accord avec aucune oscillation de neutrinos, le nouveau calcul du flux d'antineutrinos émis par les réacteurs modifie considérablement l'interprétation de leurs résultats. On parle dès lors de l'anomalie des réacteurs sources d'antineutrinos.

1. Confidence Level - niveau de confiance, i.e. on est sûr à 90% de ce qu'on avance.

On préférera donc, dans ce mémoire, prendre la limite supérieure plus prudente $\sin^2(2\theta_{13}) < 0.21$ à 3σ , qui résulte d'un ajustement des données provenant des expériences Chooz, Palo Verde, KamLAND, MINOS, ainsi que des expériences sur les neutrinos solaires et atmosphériques [14].

À noter qu'il existe aussi des expériences sur les oscillations à partir de faisceaux émis par des accélérateurs qui ont observé des anomalies, citons les expériences MiniBoone et LSND. Cependant, la situation pour ces expériences est pour le moins confuse et nous ne tiendrons pas compte de ces résultats dans ce travail.

Les meilleures contraintes actuelles $\pm 1\sigma$ sur les paramètres de mélange sont reprises ci-dessous (1.21-1.26) et proviennent de [15], hormis la borne supérieure sur $\sin^2(2\theta_{13})$. Notons que la connaissance des paramètres Δm_{21}^2 et Δm_{31}^2 permet deux possibilités correspondant à deux types de hiérarchies de masses des neutrinos : la hiérarchie normale $m_{\nu_3} \gg m_{\nu_2} > m_{\nu_1}$, et la hiérarchie inverse $m_{\nu_2} > m_{\nu_1} \gg m_{\nu_3}$.

$$\Delta m_{21}^2 = 7.59 \pm 0.20 \times 10^{-5} \text{ eV}^2 \quad (1.21)$$

$$\Delta m_{31}^2 = -2.36 \pm 0.11 \times 10^{-3} \text{ eV}^2 \quad (\text{hiérarchie inverse}) \quad (1.22)$$

$$= 2.46 \pm 0.12 \times 10^{-3} \text{ eV}^2 \quad (\text{hiérarchie normale}) \quad (1.23)$$

$$\theta_{12} = 34.4^\circ \pm 1.0 \quad (1.24)$$

$$\theta_{23} = 42.8^\circ \begin{matrix} +4.7 \\ -2.9 \end{matrix} \quad (1.25)$$

$$\theta_{13} < 13.6^\circ \quad (3\sigma) \quad (1.26)$$

1.1.4 Expériences à venir

De multiples expériences sont actuellement en prise de données ou sont en préparation. Citons à titre d'exemple les expériences : T2K (J-PARC) et NOvA (Fermilab), qui ont notamment pour but de mesurer l'angle θ_{13} au travers de la mesure de l'apparition de neutrinos ν_e dans les oscillations de neutrinos $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_e$; SNO+, dont un des objectifs est la mesure précise du flux de neutrinos solaires; MicroBooNE, qui va affiner les résultats de MiniBooNE concernant les oscillations sur de courtes distances, ou encore IceCube, qui devrait aussi mesurer les oscillations de neutrinos atmosphériques. Citons plus particulièrement les expériences Double-Chooz et Daya Bay, qui attirent notre attention sur le fait qu'elles permettront une comparaison directe entre deux mesures de flux de neutrinos à deux distances différentes, sans plus passer par une estimation numérique du flux comme dans l'expérience Chooz. Elles devraient donc clarifier la situation autour de l'angle θ_{13} . En effet, comme illustrée dans la Figure 1.2 ci-dessous, l'estimation à la hausse du flux de neutrinos suggère notamment de réinterpréter le déficit observé par de nombreuses expériences en terme d'oscillation entre non plus trois mais quatre neutrinos, voir par exemple

[16]. Nous ne rentrerons pas plus dans les détails dans ce mémoire et nous resterons dans le contexte standard de trois neutrinos légers. La problématique méritait néanmoins d'être mentionnée.

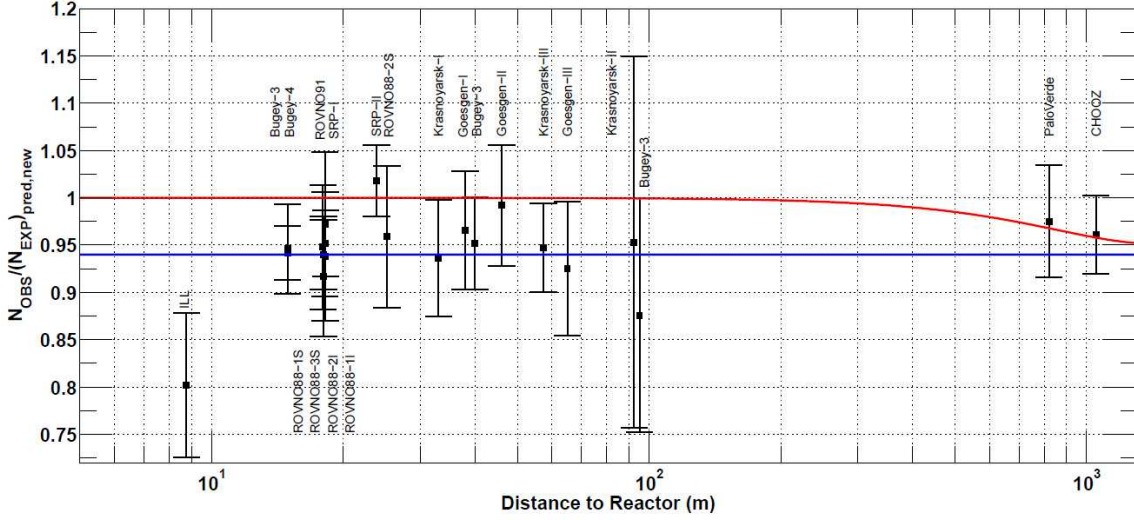


FIGURE 1.2 – Anomalie dans le flux d'antineutrinos émis par les réacteurs [13]. Les résultats expérimentaux sont comparés aux prédictions, calculées avec le nouveau flux. La courbe supérieure correspond à une solution avec trois neutrinos et $\sin^2(2\theta_{13}) = 0.06$. La courbe inférieure correspond à une solution avec un quatrième neutrino.

1.1.5 Contraintes actuelles sur les masses des neutrinos

Expérimentalement, il n'a pas encore été possible de mesurer précisément les valeurs absolues des masses des neutrinos. Seules les deux différences de masses au carré, (1.21 et 1.23), sont bien connues grâce aux expériences sur les oscillations de neutrinos. À partir de ces valeurs, on peut envisager deux types de spectre de masse possibles dénommés par hiérarchie normale et hiérarchie inverse, suivant que $m_{\nu_3} \gg m_{\nu_2} > m_{\nu_1}$ ou $m_{\nu_2} > m_{\nu_1} \gg m_{\nu_3}$, voir Figure 1.3. Dès lors, on en déduit la limite inférieure $m_{\nu}^{max} \gtrsim 0.05$ sur la masse du neutrino le plus lourd. En effet, au pire $m_{\nu}^{min} = 0$ ce qui implique :

$$m_{\nu}^{max} \gtrsim \sqrt{\Delta m_{31}^2} \approx 0.05 \text{ eV} \quad (1.27)$$

Il existe de même des limites supérieures sur la masse des neutrinos, provenant de différents types d'expériences [10] :

- Désintégration β : on mesure la fin du spectre d'énergie des électrons émis lors d'une désintégration β , et on compare aux prédictions. Vu les sensibilités de ce type d'expériences $m_{\nu} \gg 0.05$ eV, le scénario testé est un scénario où les masses des trois neutrinos sont approximativement les mêmes, i.e. avec des petites différences de masses. Ce type

d'expérience permet de fournir des limites supérieures sur l'échelle de masse $\langle m_\nu \rangle$ du neutrino émis, c'est-à-dire sur l'échelle commune des masses des neutrinos. Les expériences les plus précises sont MAINZ et TROITSK, basées sur la désintégration β du Tritium, qui donnent $\langle m_\nu \rangle < 2.3$ eV. Comme expérience future, KATRIN [17] devrait permettre d'atteindre une sensibilité de 0.2 eV, et ainsi de descendre jusqu'à $\langle m_\nu \rangle < 0.2$ eV. Cette expérience unique est attendue avec impatience.

- Double désintégration β sans neutrino dans l'état final ($\beta\beta 0\nu$) : si les neutrinos sont des particules de Majorana, alors un processus tel qu'illustré à la Figure 1.5 est permis et son amplitude est proportionnelle à :

$$m_{ee} = \sum_{i=1}^3 m_i (U_{PMNS}^2)_{ei} \quad (1.28)$$

Les expériences mesurent en fait le demi temps de vie du processus, $T_{1/2}^{0\nu} \propto |m_{ee}|^{-2}$, duquel est déduit une borne supérieure pour $\langle m_\nu \rangle$. La meilleure limite actuelle, $T_{1/2}^{0\nu} > 1.9 \times 10^{25}$ années (90% C.L.), est donnée par l'expérience Heidelberg-Moscow. Ce résultat se traduit par $\langle m_\nu \rangle \leq 0.35$ eV (90% C.L.). Citons GERDA comme expérience en cours, qui devrait monter jusqu'à des demi temps de vie de 2×10^{26} années, et SNO+ comme expérience future, qui devrait atteindre une sensibilité de l'ordre de 30 meV sur la masse des neutrinos.

- Désintégration du pion $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu$: en mesurant l'énergie du muon, il est en principe possible d'en déduire la masse de ν_μ . L'expérience PSI a fourni la meilleure borne $m_{\nu_\mu} \leq 0.17$ MeV (90% C.L.), bien au-delà des sensibilités des expériences de désintégration β .

- Désintégration du tau : tous ses modes de désintégration possibles ont un ν_τ dans l'état final. La masse du ν_τ devrait pouvoir en être déduite. L'expérience ALEPH a donné une borne $m_{\nu_\tau} \leq 18.2$ MeV (95% C.L.). Clairement, les sensibilités de ces deux derniers types d'expériences sont loin d'égaliser la sensibilité des expériences de désintégration β .

Les meilleures bornes actuelles sont résumées dans la Table 1.1 ci-dessous. Parallèlement à ces expériences, il a été possible d'établir des limites à partir de critères astrophysiques et cosmologiques. Comme critères, citons la mesure des fluctuations du bruit de fond cosmologique micro-onde par le satellite COBE et WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe), la mesure du spectre de puissance d'un grand nombre de galaxies par l'expérience 2dFGRS (Two degree field Galaxy Redshift Survey) ou encore l'analyse des structures à grande échelle (Large Scale Structure data). La limite présentée dans la Table 1.1, $\sum m_\nu < 0.17$ eV (95% C.L.), a été obtenue en combinant les données provenant de multiples expériences comme WMAP, Sloan Digital Sky Survey (SDSS) ou encore Baryonic Acoustic Oscillations (BAO). Une autre limite plus conservatrice donne $\sum m_\nu < 1.3$ eV (95% C.L.) [18].

Type d'expérience	Limite	Expérience	Année	Réf.
Oscillation des ν	$m_\nu^{max} \geq 0.05$ eV (90% C.L.)	Super-Kamiokande	2010	[19]
Spectre β du 3H	$\langle m_\nu \rangle \leq 2.3$ eV (95% C.L.)	MAINZ	2005	[20]
	$\langle m_\nu \rangle \leq 2.5$ eV (95% C.L.)	TROITSK	1999	[21]
$0\nu\beta\beta$ (90% C.L.)	$\langle m_\nu \rangle \leq 0.7 - 2.8$ eV	NEMO 3	2005	[22]
	$\langle m_\nu \rangle \leq 0.35$ eV	Heidelberg-Moscow	2001	[23]
	$\langle m_\nu \rangle \leq 0.33 - 1.35$ eV	IGEX	2000	[24]
	$\langle m_\nu \rangle \leq 0.3 - 0.71$ eV	CUORICINO	2010	[25]
$\pi \rightarrow \mu\nu$	$m_{\nu\mu} \leq 0.17$ MeV (90% C.L.)	PSI	1996	[26]
$\tau \rightarrow \pi\pi\nu$	$m_{\nu\tau} \leq 18.2$ MeV (95% C.L.)	ALEPH	1999	[27]
Cosmologie	$\sum m_\nu < 0.17$ eV (95% C.L.)	(WMAP,...)	2006	[28]
	$\sum m_\nu < 1.3$ eV (95% C.L.)	(WMAP5,BBN)	2009	[18]

TABLE 1.1 – Limites expérimentales sur les masses de neutrinos

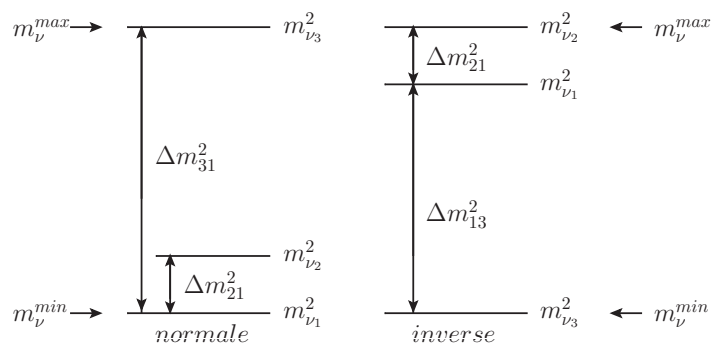
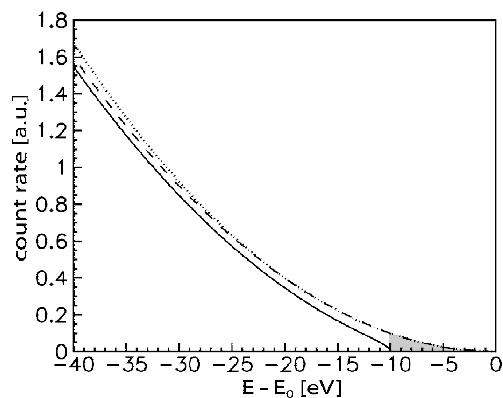
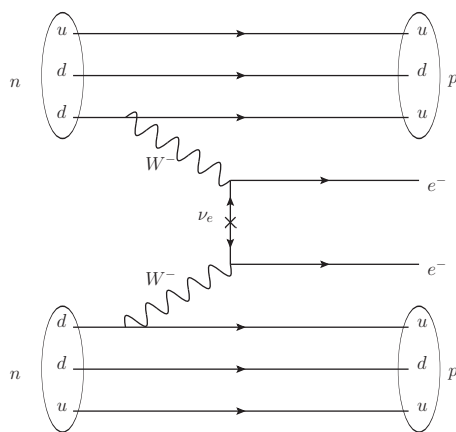


FIGURE 1.3 – Hiérarchies normale et inverse


 FIGURE 1.4 – Fin du spectre β du tritium [20]. Les courbes discontinues correspondent au cas $m(\nu_e) = 0$ et la courbe pleine à $m(\nu_e) = 10$ eV/ c^2 .

 FIGURE 1.5 – Diagramme de Feynman du processus $\beta\beta 0\nu$, proportionnel à l'entrée m_{ee} de la matrice des masses des neutrinos.

1.2 Comment donner une masse aux neutrinos ?

1.2.1 Masse de Dirac, de Majorana et masses dans le Modèle Standard

Dans la densité lagrangienne du Modèle Standard (1.1), les quarks et les leptons chargés sont des spineurs de Dirac, i.e. ils appartiennent à la représentation $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ du groupe de Lorentz L^\uparrow . Ils ont deux composantes chirales avec un total de 4 degrés de liberté par particule. Par contre, les neutrinos ν sont des particules de Weyl, i.e. appartenant à la représentation $(1/2, 0)$ du groupe de Lorentz L_+^\uparrow . De manière générale, il existe pour un fermion plusieurs types de termes de masse invariants de Lorentz :

1. Termes de Dirac : $\mathcal{L}_\psi^D = m_\psi^D \bar{\psi}_L \psi_R + h.c.$
2. Termes de Majorana pour ψ_R : $\mathcal{L}_{\psi_R}^M = \frac{M_\psi^R}{2} \bar{\psi}_R^c \psi_R + h.c.$
3. Termes de Majorana pour ψ_L : $\mathcal{L}_{\psi_L}^M = \frac{M_\psi^L}{2} \bar{\psi}_L^c \psi_L + h.c.$

$\psi^c = C\bar{\psi}^T$ désigne le conjugué de charge de l'état ψ ². Pour les masses des quarks et des leptons chargés, la brisure de symétrie génère le premier type de termes au travers de la vev du champ de Brout-Englert-Higgs. Il n'y a pas de termes de masse de Majorana, car ils violent notamment la charge électrique. Pour l'électron, on a par exemple :

$$\mathcal{L}_e^{SB} = -\bar{L}_L \phi Y_e e_R + h.c. \xrightarrow{SSB} \mathcal{L}_e^D = -\frac{v}{\sqrt{2}} Y_e \bar{e}_L e_R + h.c. \quad (1.29)$$

Sa masse vaut alors $m_e = Y_e v/\sqrt{2}$ où $v \approx 246$ GeV. On connaît donc les couplages de Yukawa des différentes particules. Par exemple, $Y_t \approx 1$ pour le quark top, $Y_e \approx 10^{-5}$ pour l'électron. Une telle différence d'ordre de grandeur ne trouve pas d'explication dans le Modèle Standard, mais comme ils appartiennent à deux familles distinctes, rien n'interdit cela.

Pour les neutrinos, les deux premiers types de termes sont absents du Modèle Standard puisqu'il n'y a pas de ν_R , et le troisième l'est aussi car il viole le nombre leptonique L , et aucune interaction renormalisable invariante sous $SU(2)_L$ et $U(1)_Y$ ne permet de violer L . On peut cependant imaginer qu'un tel terme soit généré après brisure de symétrie par de la nouvelle physique violant L . En effet, une nouvelle physique peut générer des interactions entre les particules du Modèle Standard, typiquement par l'échange de particules lourdes. Ces interactions se traduisent alors à l'échelle du Modèle Standard par des termes non renormalisables, i.e. de dimension supérieure à quatre, et invariants sous

2. voir annexes A pour plus de détails concernant l'opération de conjugaison de charge et ses propriétés.

Comment donner une masse aux neutrinos ?

$SU(2)_L \times U(1)_Y$. Parmi ces termes, il y a notamment l'opérateur dit "de Weinberg" :

$$\mathcal{L}_\nu^W = \frac{1}{2} c_{ij}^{d=5} (\overline{L_{Li}^c} \tilde{\phi}^*) (\tilde{\phi}^\dagger L_{Lj}) + h.c. \xrightarrow{SSB} \mathcal{L}_{\nu_L}^M = \frac{v^2}{4} c_{ij}^{d=5} \overline{\nu_{Li}^c} \nu_{Lj} + h.c. \quad (1.30)$$

Cet opérateur viole le nombre leptonique L de deux unités. Après brisure de la symétrie $SU(2)_L \times U(1)_Y$, il donne une matrice de masse des neutrinos :

$$m_\nu = -\frac{v^2}{2} c^{d=5} \quad (1.31)$$

Les masses générées dans ce cas sont dès lors des masses de Majorana, car les états propres sont les états autoconjugués $\nu = \nu_L + \nu_L^c$. Les coefficients $c_{ij}^{d=5}$ doivent être de dimension GeV^{-1} afin de garantir un Lagrangien sans dimension.

Afin de donner une masse aux neutrinos, nous sommes donc contraints d'introduire de nouvelles particules.

1.2.2 Introduction de singlets fermioniques : Seesaw Type-I

L'introduction de neutrinos droits singlets sous $SU(2)_L$ et de charge électrique nulle permet l'ajout de termes de Yukawa au Lagrangien du Modèle Standard. Par exemple, pour une génération :

$$\mathcal{L}_\nu^{SB} = -\overline{L_L} \tilde{\phi} Y_\nu \nu_{Re} + h.c. \xrightarrow{SSB} \mathcal{L}_\nu^D - \frac{v}{\sqrt{2}} Y_\nu \overline{\nu_{Le}} \nu_{Re} + h.c. \quad (1.32)$$

Les neutrinos seraient alors des particules de Dirac, tout comme les autres particules. Cependant, contrairement à ces dernières, ν_R est de charge électrique nulle. Il n'a pas d'interaction de jauge $SU(2)_L$ connue et est donc supposé singlet sous $SU(2)_L \times U(1)_Y$. L'addition d'un terme de masse de Majorana pour les neutrinos droits n'est donc pas interdite par l'invariance de jauge $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Par conséquent, le Lagrangien de masse général pour les neutrinos s'exprime :

$$\mathcal{L}_\nu^{SB} = -\sum_i^n \sum_\alpha^{n'} \overline{L_{Li}} \tilde{\phi} Y_{N,i\alpha}^\dagger N_{R\alpha} - \frac{1}{2} \sum_\alpha^{n'} \sum_\beta^{n'} \overline{N_{R\alpha}} M_{N,\alpha\beta} N_{R\beta}^c + h.c. \quad (1.33)$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{SSB} \\ \mathcal{L}_\nu^{mass} &= -\frac{v}{\sqrt{2}} \sum_i^n \sum_\alpha^{n'} \overline{\nu_{Li}} Y_{N,i\alpha}^\dagger N_{R\alpha} - \frac{1}{2} \sum_\alpha^{n'} \sum_\beta^{n'} \overline{N_{R\alpha}} M_{N,\alpha\beta} N_{R\beta}^c + h.c. \quad (1.34) \end{aligned}$$

où n désigne le nombre de neutrinos gauches et n' le nombre de neutrinos droits, que nous appellerons dorénavant N_R . Notons que le terme M_N n'est pas lié à l'échelle électrofaible $v/\sqrt{2}$, et peut donc être arbitrairement grand. Si il trouve son origine au-delà du Modèle

Standard, on suppose naturellement $M_N \gg v$. De manière générale, on voit dans (1.33) que la présence simultanée des termes de masse de Dirac et de Majorana viole le nombre leptonique. Envisageons alors deux cas de figure $M_N = 0$ et $M_N \neq 0$.

Si on suppose $M_N = 0$, le nombre leptonique est conservé et les neutrinos sont des particules de Dirac, comme toutes les autres particules. Il n'y a à priori aucune raison de rejeter ce scénario. Cependant ceci requiert l'hypothèse supplémentaire d'une symétrie expliquant pourquoi $M_N = 0$, comme une symétrie de type $U(1)_{B-L}$, alors que l'équation (1.33) ne demande aucune symétrie particulière. De plus, si on prend par exemple $m_\nu \approx 0.1$ eV, les couplages de Yukawa doivent être de l'ordre de 10^{-12} , soit plusieurs ordres de grandeurs plus petits que les autres couplages de Yukawa. Du point de vue esthétique, une telle différence est interpellante. En effet, considérons la première famille de quarks et de leptons. Comme $m_e \approx 500$ keV, $1.5 \leq m_d \leq 4$ MeV et $4 \leq m_u \leq 8$ MeV, on voit qu'il y a plus ou moins un ordre de grandeur entre les différentes masses, alors que ν_e est au moins 5 ordres de grandeur plus léger. De même, une analyse des masses de la deuxième et de la troisième famille révèle des écarts d'au moins 8, respectivement 9 ordres de grandeur ! La petitesse de masse des neutrinos semble donc anormale, "exotique" par rapport aux autres masses présentes dans le Modèle Standard.

Si $M_N \neq 0$, alors dans ce cas (1.34) peut se réécrire, en omettant les indices :

$$\mathcal{L}_\nu^{mass} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \overline{\nu}_L^c & \overline{N}_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & m_D^T \\ m_D & M_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ N_R^c \end{pmatrix} + h.c. \equiv -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \overline{\nu}_L^c & \overline{N}_R \end{pmatrix} M_\nu \begin{pmatrix} \nu_L \\ N_R^c \end{pmatrix} + h.c. \quad (1.35)$$

où $m_D = \frac{v}{\sqrt{2}} Y_N$. Comme $M_N \gg v$, on obtient n états propres légers (neutrinos légers) avec comme matrice de masse :

$$m_\nu = -\frac{v^2}{2} Y_N^T \frac{1}{M_N} Y_N \quad (1.36)$$

et n' états propres lourds (neutrinos lourds) avec comme matrice de masse :

$$m_N \approx M_N \quad (1.37)$$

Le coefficient de l'opérateur de Weinberg s'exprime alors :

$$c^{d=5} = Y_N^T \frac{1}{M_N} Y_N \quad (1.38)$$

Pour avoir $m_\nu \approx 0.1$ eV, il faut que $M_N/Y_N^2 \approx 10^{14}$ GeV. Si par exemple $Y_N \sim 10^{-5}$ comme pour le couplage de Yukawa de l'électron, alors $M_N \sim 10^4$ GeV. De même si $Y_N \sim 1$, alors $M_N \sim 10^{14}$ GeV. La structure (1.33), que l'on nomme Seesaw Type-I, est donc particulièrement intéressante car elle génère naturellement une faible masse pour les

Comment donner une masse aux neutrinos ?

neutrinos. En effet, soit les couplages de Yukawa sont du même ordre de grandeur que ceux rencontrés dans le Modèle Standard et l'échelle de la nouvelle physique n'excéderait alors pas de beaucoup l'échelle électrofaible, soit les couplages de Yukawa sont plus proches de l'unité et l'échelle de M_N serait plus grande.

1.2.3 Introduction de triplets scalaires : Seesaw Type-II

L'introduction de nouveaux champs scalaires, formant un triplet $\vec{\Delta} = (\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$ sous $SU(2)$ et d'hypercharge $Y = 2$, permet l'ajout de nouveaux termes au Lagrangien, tels que :

$$\mathcal{L}_{\Delta}^{Yuk-\nu} = \widetilde{L}_L Y_{\Delta} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\Delta}) L_L + h.c. \quad (1.39)$$

$$\mathcal{L}_{\Delta}^{Yuk} = \mu_{\Delta} \widetilde{\phi}^{\dagger} (\vec{\sigma} \cdot \vec{\Delta})^{\dagger} \phi + h.c. \quad (1.40)$$

$$\mathcal{L}_{\Delta}^M = \vec{\Delta}^{\dagger} M_{\Delta}^2 \vec{\Delta} \quad (1.41)$$

La présence simultanée des deux premiers termes brise le nombre leptonique. Nous n'écrivons pas le Lagrangien minimal, mais il peut être trouvé dans par exemple [29]. À partir de celui-ci, l'expansion en puissances de M_{Δ} fournit notamment un opérateur de Weinberg avec :

$$c^{d=5} = 4Y_{\Delta} \frac{\mu_{\Delta}}{M_{\Delta}^2} \quad (1.42)$$

de sorte que la matrice de masse des neutrinos légers s'exprime :

$$m_{\nu} = -2Y_{\Delta} v^2 \frac{\mu_{\Delta}}{M_{\Delta}^2} \quad (1.43)$$

Le diagramme associé est représenté Figure 1.6. On voit que $m_{\nu} \sim 0.1$ eV nécessite que la combinaison $Y_{\Delta} \mu_{\Delta} / M_{\Delta}^2$ soit de l'ordre de $\sim 10^{-6}$. Afin de générer l'opérateur de Weinberg, le scalaire doit être un triplet car il doit pouvoir se coupler à un doublet leptonique L_L et un doublet de Higgs ϕ , en d'autres termes $2 \times 2 = 3 + 1$. Notons que l'option singlet scalaire ne fonctionne pas. En effet, celui-ci devrait alors se coupler avec le seul autre singlet qu'on puisse construire avec une combinaison de L_L , qui est $\nu_{Li} e_{lj} - \nu_{Lj} e_{li}$. Comme cette combinaison ne génère pas l'opérateur de Weinberg (1.30), le singlet scalaire ne génère pas de masse pour les neutrinos [30].

1.2.4 Introduction de triplets fermioniques : Seesaw Type-III

Une troisième possibilité est d'introduire des nouveaux champs fermioniques formant un triplet $\vec{\Sigma} = (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$ sous $SU(2)$. En effet, il peut se coupler à L_L et ϕ dans leur

combinaison triplet. L'adjonction au Modèle Standard du Lagrangien :

$$\mathcal{L}_\Sigma^{int} = -\frac{1}{2}\overline{\Sigma_R} M_\Sigma \overline{\Sigma_R^c} - \overline{\Sigma_R} Y_\Sigma (\tilde{\phi}^\dagger \vec{\sigma} L_L) + h.c. \quad (1.44)$$

génère un opérateur de Weinberg avec :

$$c^{d=5} = Y_\Sigma^T \frac{1}{M_\Sigma} Y_\Sigma \quad (1.45)$$

La matrice de masse des neutrinos s'exprime alors :

$$m_\nu = -\frac{v^2}{2} Y_\Sigma^T \frac{1}{M_\Sigma} Y_\Sigma \quad (1.46)$$

On retrouve la même forme pour m_ν que dans le mécanisme Seesaw Type-I car le diagramme est le même. La différence est que les neutrinos droits Σ^0 ont des partenaires chargés Σ^\pm qui peuvent induire des effets supplémentaires pour les processus $\mu \rightarrow e\gamma$, $\mu \rightarrow eee$ et $\mu - e$ conversion. Le diagramme associé est représenté Figure 1.6.

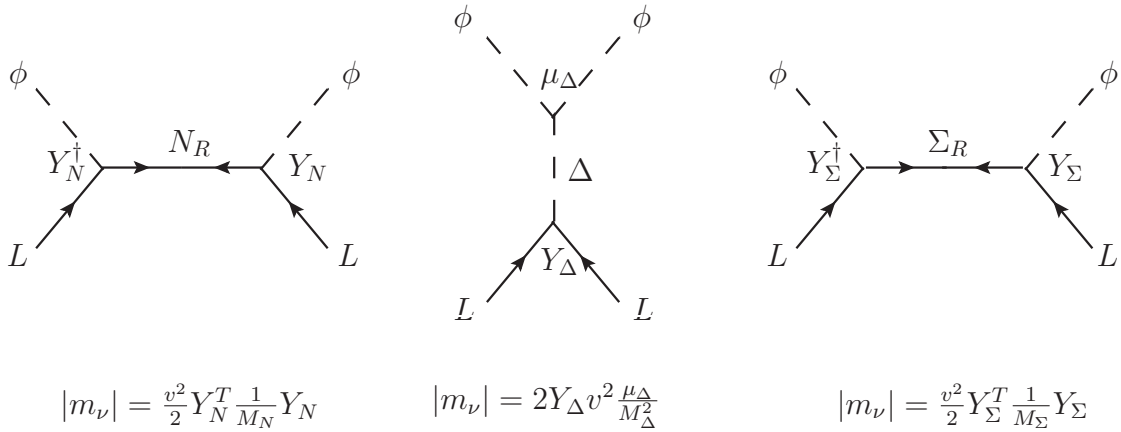


FIGURE 1.6 – Récapitulatif des différents types de mécanismes Seesaw avec la matrice de masse des neutrinos qu'ils génèrent. On a représenté les diagrammes de Feynman illustrant la génération de l'opérateur de Weinberg pour les trois mécanismes Seesaw : Type-I, Type-II et Type-III. Comme L_L et ϕ sont des doublets sous $SU(2)_L$, l'opérateur de Weinberg ne peut être induit par le simple échange d'une particule que si celle-ci est singlet ou triplet sous $SU(2)_L$, ce qui mène à ces trois options.

2 Seesaw Type-I : Lagrangien de haute énergie et Lagrangien effectif

Dans ce chapitre, nous introduisons tout d'abord le Lagrangien général du modèle Seesaw Type-I. Nous développons ensuite une procédure systématique permettant de trouver les états propres de masse. Nous voyons alors comment les interactions à l'origine de la masse des neutrinos induisent aussi des processus tels que $\mu \rightarrow e\gamma$, $\mu \rightarrow eee$ et $\mu - e$ *conversion*. Nous introduisons aussi les différentes expressions des rapports de branchement de ces processus.

Nous formulons ensuite tout cela en terme de théorie effective, ce qui est presque équivalent à prendre l'ordre $1/\mathcal{M}^2$ du Lagrangien général, où \mathcal{M} est l'échelle de la nouvelle physique. Nous constatons alors que si les trois modèles Seesaw génèrent le même opérateur de Weinberg à l'ordre $1/\mathcal{M}$, ils génèrent des opérateurs différents à l'ordre $1/\mathcal{M}^2$. Or, ce sont justement ces derniers qui sont à l'origine des processus changeant la saveur leptonique comme $\mu \rightarrow e\gamma$, $\mu \rightarrow eee$ et $\mu - e$ *conversion*. L'observation de ces processus permettrait donc en principe de distinguer les mécanismes Seesaw.

Enfin, après un comptage des paramètres du Lagrangien général et du Lagrangien effectif, nous développons une méthode explicite de reconstruction de la théorie générale à partir de la théorie effective. Une telle reconstruction a déjà été envisagée dans la littérature [31], mais elle n'est valable que dans le cas $n = n'$, où n est le nombre de neutrinos gauches et n' est le nombre de neutrinos droits. Nous précisons en particulier les conditions nécessaires à la reconstruction quelque soit n et n' , de manière à pouvoir appliquer ces résultats par la suite.

2.1 Lagrangien général

Le Lagrangien leptonique général du modèle Seesaw Type-I avec n neutrinos gauches et n' neutrinos droits s'écrit :

$$\mathcal{L}_{leptons}^{Type-I} = \mathcal{L}_{leptons}^{KE} + \mathcal{L}_{leptons}^{SB} \quad (2.1)$$

On a défini :

$$\mathcal{L}_{leptons}^{KE} = \sum_i^n i \overline{L_{Li}} \not{D} L_{Li} + i \overline{e_{Ri}} \not{D} e_{Ri} + \sum_{\alpha=1}^{n'} i \overline{N_{R\alpha}} \not{D} N_{R\alpha} \quad (2.2)$$

qui contient les termes cinétiques et les interactions de jauge pour les n doublets de chiralité gauche $L_L = (\nu_L e_L)^T$, les n leptons chargés de chiralité droite e_R singlets sous $SU(2)_L$, et les n' neutrinos droits N_R singlets sous $SU(2)_L \times U(1)_Y$. On a aussi défini :

$$\mathcal{L}_{leptons}^{SB} = - \sum_i^n \sum_j^n \overline{L_{Li}} \phi Y_{e,ij}^\dagger e_{Rj} - \sum_i^n \sum_{\alpha}^{n'} \overline{L_{Li}} \tilde{\phi} Y_{N,i\alpha}^\dagger N_{R\alpha} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha}^{n'} \sum_{\beta}^{n'} \overline{N_{R\alpha}} M_{N,\alpha\beta} N_{R\beta}^c + h.c. \quad (2.3)$$

qui contient les interactions de Yukawa de couplage Y_e pour les leptons chargés et de couplage Y_N pour les neutrinos, ainsi qu'un terme de masse de Majorana M_N pour les neutrinos droits, ce qui est permis en vertu de l'invariance de Lorentz et de $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Dans ce qui suit, nous n'écrirons plus explicitement tous les indices. Après brisure de symétrie $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{em}$ le champ ϕ acquiert une vev $\langle \phi \rangle = v/\sqrt{2}$. En définissant la matrice $n \times n'$ de masse de Dirac des neutrinos $m_D \equiv \frac{v}{\sqrt{2}} Y_N$, les termes de masse des neutrinos peuvent s'exprimer sous forme matricielle :

$$\mathcal{L}_{\nu}^{mass} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \overline{\nu_L^c} & \overline{N_R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & m_D^T \\ m_D & M_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ N_R^c \end{pmatrix} + h.c. \quad (2.4)$$

$$\equiv -\frac{1}{2} \overline{n_L^c} M_{\nu} n_L + h.c. \quad (2.5)$$

où $\nu_L = (\nu_{L1} \ \nu_{L2} \ \dots \ \nu_{Ln})^T$, $N_R = (N_{R1} \ N_{R2} \ \dots \ N_{Rn'})^T$, et :

$$n_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ N_R^c \end{pmatrix} \quad ; \quad M_{\nu} = \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & m_D^T \\ m_D & M_N \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

La matrice M_{ν} étant symétrique, il est possible de trouver une matrice unitaire U_D telle que $M_{\nu}^D \equiv U_D^T M_{\nu} U_D$ soit une matrice $(n + n') \times (n + n')$ diagonale par bloc. La matrice U_D est donnée en première approximation par :

$$U_D \approx U_N = \begin{pmatrix} 1 & m_D^\dagger (M_N^{-1})^\dagger \\ -M_N^{-1} m_D & 1 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Explicitement, avec $n_L' \equiv U_N^\dagger n_L$ et $M_{\nu}^N \equiv U_N^T M_{\nu} U_N$:

$$\mathcal{L}_{\nu}^{mass} = -\frac{1}{2} \overline{n_L^c} U_N^* U_N^T M_{\nu} U_N U_N^\dagger n_L + h.c. = -\frac{1}{2} \overline{n_L^c} M_{\nu}^N n_L' + h.c. \quad (2.8)$$

Comme on suppose $M_N \gg m_D$, U_N est unitaire à l'ordre $\mathcal{O}(m_D^2/M_N^2)$, et il s'en suit :

$$M_\nu^N = U_N^T M_\nu U_N = \begin{pmatrix} -m_D^T M_N^{-1} m_D & \mathcal{O}(m_D^3/M_N^2) \\ \mathcal{O}(m_D^3/M_N^2) & M_N + \mathcal{O}(m_D^2/M_N) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} m_\nu & 0 \\ 0 & M_N \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

où m_ν est la matrice de masse des neutrinos légers :

$$m_\nu = -m_D^T M_N^{-1} m_D \quad (2.10)$$

Les états propres légers et lourds sont donnés par $n'_L = (\nu'_L \ N'_R)^T$, avec :

$$\begin{cases} \nu'_L &= \nu_L - m_D^\dagger (M_N^{-1})^\dagger N_R^c \\ N'_R &= N_R^c + M_N^{-1} m_D \ \nu_L \end{cases} \quad (2.11)$$

La plupart des références comme [10], [32] ou [33] termine leur analyse ici. Cependant, la matrice U_N induit des modifications dans les termes cinétiques. En effet, en terme des états ν'_L et N'_R , le Lagrangien cinétique des neutrinos devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\nu^{KE} &= i\overline{\nu'_L} \not{\partial} \nu'_L + i\overline{N'_R} \not{\partial} N'_R = i\overline{n_L} \not{\partial} n_L = i\overline{n'_L} U_N^\dagger \not{\partial} U_N n'_L = i\overline{n'_L} \not{\partial} N n'_L \\ &= i \begin{pmatrix} \overline{\nu'_L} & \overline{N'_R} \end{pmatrix} \not{\partial} \begin{pmatrix} 1 + \epsilon_N & 0 \\ 0 & 1 + \epsilon'_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu'_L \\ N'_R \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.12)$$

où $N \equiv U_N^\dagger U_N$ et :

$$\epsilon_N = \epsilon_N^\dagger = m_D^\dagger \frac{1}{M_N^\dagger} \frac{1}{M_N} m_D = \frac{v^2}{2} Y_N^\dagger \frac{1}{M_N^\dagger} \frac{1}{M_N} Y_N \quad (2.13)$$

$$\epsilon'_N = \epsilon_N^\dagger = \frac{1}{M_N} m_D m_D^\dagger \frac{1}{M_N^\dagger} = \frac{v^2}{2} \frac{1}{M_N} Y_N Y_N^\dagger \frac{1}{M_N^\dagger} \quad (2.14)$$

Pour que les états soient physiques, il faut redéfinir les champs de manière à avoir des termes cinétiques canoniques, c'est-à-dire correctement normalisés. Soit $n''_L \equiv N^{1/2} n'_L$ où :

$$N^{1/2} = (U_N^\dagger U_N)^{1/2} \approx \begin{pmatrix} 1 + \frac{\epsilon_N}{2} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{\epsilon'_N}{2} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Le Lagrangien des neutrinos après brisure de symétrie s'exprime alors :

$$\begin{aligned} L_\nu &= L_\nu^{KE} + L_\nu^{mass} = i \overline{n''_L} \not{\partial} n''_L - \frac{1}{2} \overline{n''_L} (N^{-1/2})^T M_\nu^N N^{-1/2} n''_L + h.c. \\ &= i \overline{n''_L} \not{\partial} n''_L - \frac{1}{2} \overline{n''_L} M_\nu^D n''_L + h.c. \\ &= \frac{i}{2} \overline{\nu^M} \not{\partial} \nu^M - \frac{1}{2} \overline{\nu^M} M_\nu^D \nu^M \end{aligned} \quad (2.16)$$

où on a défini les états de Majorana :

$$\nu^M \equiv n_L'' + (n_L'')^c \quad (2.17)$$

La matrice de masses diagonale par bloc devient :

$$M_\nu^D \equiv (N^{-1/2})^T M_\nu^N N^{-1/2} = \begin{pmatrix} m_\nu & 0 \\ 0 & M_N(1 + \epsilon'_N) \end{pmatrix} + \mathcal{O}\left(\frac{m_D^4}{M_N^3}\right) \quad (2.18)$$

avec m_ν défini en (2.10). La matrice qui diagonalise M_ν par bloc s'exprime donc :

$$U_D \equiv U_N N^{-1/2} = \begin{pmatrix} (\mathbb{1}_{n \times n} - \frac{\epsilon_N}{2}) & m_D^\dagger (M_N^{-1})^\dagger \\ -M_N^{-1} m_D & (\mathbb{1}_{n' \times n'} - \frac{\epsilon'_N}{2}) \end{pmatrix} + \mathcal{O}\left(\frac{m_D^3}{M_N^3}\right) \quad (2.19)$$

On peut cependant aller plus loin, puisque les matrices m_ν et $M_N(1 + \epsilon'_N)$ sont diagonalisables par des matrices unitaires U_{PMNS} et U_M respectivement. La matrice complète de changement de base s'exprime finalement comme :

$$U \equiv U_N N^{-1/2} \text{diag}(U_{PMNS}, U_M) = \begin{pmatrix} (\mathbb{1}_{n \times n} - \frac{\epsilon_N}{2}) U_{PMNS} & m_D^\dagger (M_N^{-1})^\dagger U_M \\ -M_N^{-1} m_D U_{PMNS} & (\mathbb{1}_{n' \times n'} - \frac{\epsilon'_N}{2}) U_M \end{pmatrix} + \mathcal{O}\left(\frac{m_D^3}{M_N^3}\right) \quad (2.20)$$

Les $n + n'$ états propres de saveur sont reliés aux états propres de masse par :

$$n_L = U_N n_L' = U_N N^{-1/2} P_L \nu^M = U P_L \nu \quad (2.21)$$

où P_L (P_R) est le projecteur gauche (droit), et :

$$\nu \equiv \text{diag}(U_{PMNS}^\dagger, U_M^\dagger) \nu^M \quad (2.22)$$

sont les états physiques de Majorana, états propres de masse. Ce sont précisément les états que nous recherchions. Explicitement :

$$\begin{pmatrix} \nu_L \\ N_R^c \end{pmatrix}_i = \sum_{\kappa=1}^{n+n'} U_{i\kappa} P_L \nu_\kappa \quad ; \quad \begin{pmatrix} \nu_L^c \\ N_R \end{pmatrix}_i = \sum_{\kappa=1}^{n+n'} U_{i\kappa}^* P_R \nu_\kappa \quad (2.23)$$

Clairement, $\nu = \nu^c$. Comme on pouvait s'y attendre, si des termes de Majorana sont présents dans le Lagrangien initial, les états physiques sont des particules de Majorana, c'est-à-dire qu'elles sont leurs propres antiparticules.

Pour les leptons chargés, comme il n'y a pas de terme de Majorana, la matrice $n \times n$ de masse de Dirac après brisure de symétrie $m_e = v/\sqrt{2} Y_e$ est diagonalisable de la

même manière que dans le secteur des quarks, et le changement de base s'exprime :

$$\mathbf{e}_L = V_L^{e\dagger} e_L \quad \mathbf{e}_R = V_R^{e\dagger} e_R \quad (2.24)$$

où V_L^e et V_R^e sont les matrices qui diagonalisent m_e . e_R , e_L et \mathbf{e}_R , \mathbf{e}_L sont les états propres de saveur et de masse respectivement.

Finalement, on obtient n particules de Dirac $\mathbf{e}_i \equiv (\mathbf{e}_{Li} \ \mathbf{e}_{Ri})^T$, états propres de masse des leptons chargés, et $(n + n')$ particules de Majorana ν_κ , états propres de masse des neutrinos. Les états propres de saveur et de masse sont reliés par :

$$e_{Li} = \sum_{j=1}^n V_{Lij}^e \mathbf{e}_{Lj} \quad ; \quad e_{Ri} = \sum_{j=1}^n V_{Rij}^e \mathbf{e}_{Rj} \quad ; \quad \nu_{Li} = \sum_{\kappa=1}^{n+n'} U_{i\kappa} P_L \nu_\kappa \quad (2.25)$$

Ces changements de base impliquent des modifications dans le Lagrangien d'interaction. En effet, les interactions avec les bosons W et Z deviennent :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{CC}^W &= \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \sum_{i=1}^n \bar{e}_{Li} \gamma^\mu \nu_{Li} + h.c. = \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \sum_{i,j=1}^n \sum_{\kappa=1}^{n+n'} \bar{e}_{Lj} \gamma^\mu V_{Lij}^{e*} U_{i\kappa} P_L \nu_\kappa + h.c. \\ &= \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \sum_{j=1}^n \sum_{\kappa=1}^{n+n'} \bar{\mathbf{e}}_{Lj} \gamma^\mu B_{j\kappa} P_L \nu_\kappa + h.c. \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{NC}^Z &= \frac{g}{\cos \theta_W} Z_\mu \left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \bar{\nu}_{Li} \gamma^\mu \nu_{Li} + \left(-\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W\right) \bar{e}_{Li} \gamma^\mu e_{Li} + \sin^2 \theta_W \bar{e}_{Ri} \gamma^\mu e_{Ri} \right] \\ &= \frac{g}{\cos \theta_W} Z_\mu \left[\sum_{\lambda,\kappa=1}^{n+n'} \frac{1}{2} \bar{\nu}_\lambda \gamma^\mu C_{\lambda\kappa} P_L \nu_\kappa - \frac{1}{2} \bar{\mathbf{e}}_{Li} \gamma^\mu \mathbf{e}_{Li} - \sin^2 \theta_W J_{em}^\mu \right] \end{aligned} \quad (2.27)$$

et les interactions électromagnétiques restent inchangées :

$$\mathcal{L}_{NC}^{em} = e A_\mu J_{em}^\mu = -e A_\mu \sum_{i=1}^n Q_i (\bar{e}_{Li} \gamma_\mu \mathbf{e}_{Li} + \bar{e}_{Ri} \gamma_\mu \mathbf{e}_{Ri}) \quad (2.28)$$

Nous avons défini dans (2.26) et (2.27) les quantités :

$$B_{j\kappa} = \sum_{i=1}^n V_{Lij}^{e*} U_{i\kappa} \quad (2.29)$$

$$C_{\lambda\kappa} = \sum_{i=1}^n U_{i\lambda}^* U_{i\kappa} \quad (2.30)$$

Maintenant que nous avons l'expression générale du Lagrangien Seesaw Type-I dans la base des états propres de masse, il est possible de calculer les amplitudes de différents processus non prédits par le Modèle Standard. C'est l'objet de la section suivante. Avant tout, quelques remarques s'imposent.

Remarques

1) On observe une différence notable avec le secteur des quarks : dû à la renormalisation des champs, la matrice unitaire de changement de base U_{PMNS} , qui diagonalise (2.10) et qui relie donc les états propres de saveur aux états propres de masse des neutrinos légers, est remplacée par une matrice non-unitaire U_ν :

$$U_\nu \equiv \left(\mathbb{1}_{n \times n} - \frac{\epsilon_N}{2} \right) U_{PMNS} \quad (2.31)$$

Il en résulte que $C_{\lambda\kappa} \neq \delta_{\lambda\kappa}$, ce qui a notamment, par (2.27), pour conséquence une modification de la constante de Fermi G_F du Modèle Standard [29].

2) On voit depuis (2.26) et (2.27) que les interactions avec les bosons W et Z sont modifiées par les effets de non-unitarité. Pour donner un exemple simple, si l'on suppose $V_{Lij} = \delta_{ij}$, l'amplitude d'un processus $l \rightarrow \nu_{l'} W^-$, où $l, l' = 1, 2, 3$, est proportionnelle à $U_{ll'} = -[\epsilon_N]_{ll'}/2$. Cela permet donc des interactions du W qui ne respectent pas la saveur leptonique, et qui contribuent dès lors aux processus changeant la saveur tel que $\mu \rightarrow e\gamma$.

3) À noter cependant que les couplages entre leptons chargés restent diagonaux, que ce soit avec le Z ou avec le photon. Il n'y a pas de couplage direct entre deux leptons chargés de saveurs différentes, et donc concrètement, un processus comme $\mu \rightarrow e\gamma$ doit forcément passer par un état neutre, qui lui peut se mélanger avec un état neutre d'une autre saveur. Ceci implique que ces processus ne peuvent se faire à l'ordre arbre. Il en résulte que tous les processus avec un changement de saveur de lepton chargé sont à l'ordre boucle, cf. les diagrammes de Feynman de l'annexe B.

4) Expérimentalement, on ne connaît pour l'instant que deux différences de masses de neutrinos légers au carré $\Delta m_{\alpha\beta}^2$ ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$). Comme conséquence, deux neutrinos légers au moins sont massifs : le troisième ne l'est pas forcément. Or, dans le mécanisme Seesaw Type-I, n' neutrinos droits vont engendrer n' masses de neutrinos légers. En effet, supposons par exemple qu'il n'y ait qu'un neutrinos droit, alors :

$$\mathcal{L}_\nu^{mass} = - \sum_i^3 \overline{\nu_{Li}} m_{D,i}^\dagger N_R - \frac{1}{2} \overline{N_R} M_N N_R^c + h.c. \quad (2.32)$$

Si l'on change de base $\nu_{Li} \rightarrow \nu'_{Li}$ de manière à ce qu'un état s'exprime :

$$\nu'_{L1} \propto \sum_i^3 \nu_{Li} \quad (2.33)$$

alors on remarque que seul l'état ν'_{L1} se couple au N_R et donc lui seul va acquérir une masse, les états ν'_{L2} et ν'_{L3} restant sans masse. Il en résulte qu'il faut introduire au minimum deux neutrinos droits pour que le modèle soit en accord avec les données expérimentales.

2.2 Phénoménologie

2.2.1 Expressions des rapports de branchement des processus

$l \rightarrow l'\gamma$, $l \rightarrow l'l'l'$, $\mu - e$ conversion

À partir des relations (2.26) et (2.27), il est possible de calculer les rapports de branchement de différents processus violant la saveur leptonique. Nous nous intéresserons dans ce mémoire aux trois processus suivants : $l \rightarrow l'\gamma$, $l \rightarrow l'l'l'$ et $\mu - e$ conversion.

$l \rightarrow l'\gamma$

C'est un processus de désintégration d'un lepton l en un lepton l' d'une autre saveur et un photon. Ses diagrammes de Feynman sont représentés dans la Figure B.1 de l'annexe B. Le rapport de branchement de ce processus a été calculé dans [34] et est donné par :

$$Br(l \rightarrow l'\gamma) = \frac{\Gamma(l \rightarrow l'\gamma)}{\Gamma_l} = \frac{\alpha_W^3 s_W^2}{256\pi^2} \frac{m_l^4}{M_W^4} \frac{m_l}{\Gamma_l} |G_\gamma^{ll'}|^2 \quad (2.34)$$

où $\alpha_W = \frac{2M_W^2 G_F}{\sqrt{2}\pi}$, $M_W \approx 80.399$ GeV est la masse du boson W, $s_W^2 = \sin^2 \theta_W \approx 0.23116$ où θ_W est l'angle de Weinberg, et Γ_l est le taux de désintégration total du lepton l . $G_\gamma^{ll'}$ est un facteur de forme, dont l'expression est donnée en annexes C, qui dépend des éléments $B_{i\kappa}$, voir (2.29). Notons que ces facteurs de formes sont aussi fonctions des masses des états lourds, qui s'y trouvent notamment sous la forme de puissances de $1/M_N$ et de logarithmes $\log M_N$. Cette dépendance logarithmique s'avérera cruciale pour la section 3.2.2.

$l \rightarrow l'l'l'$

C'est un processus de désintégration d'un lepton l en trois leptons l' de même saveur. Les diagrammes de Feynman associés sont représentés dans la Figure B.2 de l'annexe B. L'expression du rapport de branchement se trouve dans [34] et [35] :

$$\begin{aligned} Br(l \rightarrow l'l'l') &= \frac{\Gamma(l \rightarrow l'l'l')}{\Gamma_l} = \frac{\alpha_W^4}{24576\pi^3} \frac{m_l^4}{M_W^4} \frac{m_l}{\Gamma_l} \\ &\times \left\{ 2 \left| \frac{1}{2} F_{Box}^{ll'VV'} + F_Z^{ll'} - 2s_W^2 (F_Z^{ll'} - F_\gamma^{ll'}) \right|^2 + 4s_W^4 |F_Z^{ll'} - F_\gamma^{ll'}|^2 \right. \\ &+ 16s_W^2 \operatorname{Re} \left[(F_Z^{ll'} + \frac{1}{2} F_{Box}^{ll'VV'}) G_\gamma^{ll'*} \right] - 48s_W^4 \operatorname{Re} \left[(F_Z^{ll'} - F_\gamma^{ll'}) G_\gamma^{ll'*} \right] \\ &\left. + 32s_W^4 |G_\gamma^{ll'}|^2 \left[\ln \frac{m_l^2}{m_{l'}^2} - \frac{11}{4} \right] \right\} \quad (2.35) \end{aligned}$$

Les expressions des différents facteurs de forme se trouvent en annexes. Notons qu'il existe aussi des processus tels que $l \rightarrow l_1 l_2 l_3$, i.e. avec plusieurs saveurs dans l'état final. Leurs expressions sont données dans [34], et sont très similaires à (2.35). Nous n'allons cependant pas les utiliser dans ce mémoire, car ils donnent des contraintes très similaires à celles provenant des processus $l \rightarrow l'l'l'$.

$\mu - e$ conversion

Conversion d'un muon en un électron au sein d'un atome, ses diagrammes de Feynman sont représentés dans la Figure (B.3). Plus précisément, on devrait écrire $\mu(N, Z) \rightarrow e(N, Z)$, où Z est le numéro atomique de l'atome, et N son nombre de neutrons. C'est un processus très semblable au précédent. Son rapport de branchement a été calculé dans [36]¹ :

$$Br_{\mu e}(N, Z) = \frac{\Gamma[\mu(N, Z) \rightarrow e(N, Z)]}{\Gamma[\mu(N, Z) \rightarrow \text{capture}e]} \approx \frac{\alpha_{em}^3 \alpha_W^4}{32\pi^2} \frac{m_\mu^4}{M_W^4} \frac{m_\mu}{\Gamma_{capt.}} \frac{Z_{eff}^4}{Z} |F(-m_\mu^2)|^2 |Q_W|^2 \quad (2.36)$$

où $\alpha_{em} \approx 1/137$ est la constante de structure fine, Z_{eff} est le numéro atomique effectif, $|F(-m_\mu^2)|$ est le facteur de forme nucléaire, $\Gamma_{capt.}$ est la valeur expérimentale du taux de capture du muon par le noyau, et :

$$Q_W = V_u(2Z + N) + V_d(Z + 2N) \quad (2.37)$$

avec :

$$V_u = \frac{2}{3} s_W^2 (F_\gamma^{\mu e} - G_\gamma^{\mu e} - F_Z^{\mu e}) + \frac{1}{4} (F_Z^{\mu e} - F_{box}^{\mu e u u}) \quad (2.38)$$

$$V_d = -\frac{1}{3} s_W^2 (F_\gamma^{\mu e} - G_\gamma^{\mu e} - F_Z^{\mu e}) - \frac{1}{4} (F_Z^{\mu e} + F_{box}^{\mu e d d}) \quad (2.39)$$

Les expressions des différents facteurs de forme se trouvent dans l'annexe C. Les autres facteurs peuvent être trouvés dans par exemple [40], et sont repris dans la Table 2.1 ci-dessous.

Ce type de processus est l'objet d'une grande attention actuellement car les expériences qui ont pour but de les détecter sont de plus en plus précises et propres. En effet, une seule particule est créée dans l'état final, l'électron. Son énergie est donc de l'ordre de $E_e \approx m_\mu = 105$ MeV, ce qui est loin du bruit principal qui est la désintégration $\mu \rightarrow e \bar{\nu}_e \nu_\mu$, dont le spectre d'énergie diminue drastiquement au-delà de $m_\mu/2$. Il en résulte

1. Cette expression est cependant en contradiction avec d'autres publiées notamment dans [37], [38] et [39], qui diffèrent elles-mêmes les unes des autres. Ce fait est curieusement largement ignoré. Après analyses et réflexions, il apparaît que l'expression présentée dans [35], dont une approximation se trouve dans [34], est la plus cohérente. Recalculer prudemment ce processus dans le modèle Seesaw Type-I constituerait un projet de recherche important pour déterminer avec certitude quelle est le facteur de forme.

que le principal bruit de fond de ces expériences provient du faisceau de muons [41].

Noyau $\frac{A}{Z}N$	Z_{eff}	$ F(-m_\mu^2) $	$\Gamma_{capt.}$ [GeV]
${}_{13}^{28}Al$	11.5	0.64	4.64079×10^{-19}
${}_{22}^{48}Ti$	17.6	0.54	1.70422×10^{-18}
${}_{38}^{80}Sr$	25.0	0.39	4.61842×10^{-18}
${}_{51}^{121}Sb$	29.0	0.32	6.71711×10^{-18}
${}_{79}^{197}Au$	33.5	0.16	8.59868×10^{-18}
${}_{82}^{207}Pb$	34.0	0.15	8.84868×10^{-18}

TABLE 2.1 – Valeurs des paramètres Z_{eff} , $|F(-m_\mu^2)|$ et $\Gamma_{capt.}$ pour différents noyaux

2.2.2 Limites expérimentales

Les limites actuelles sur les rapports de branchement des processus envisagés sont résumées dans la Table 2.2 ci-dessous. Elles sont les fruits des expériences MEGA, SINDRUM I, SINDRUM II, BABAR et BELLE. Nous mentionnons aussi les expériences à venir et leur sensibilité espérée dans la Table 2.3. L'expérience MEG est déjà opérationnelle, et ses dernières publications [42] fournissent une limite supérieure $BR(\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma) \leq 2.8 \times 10^{-11}$ (90% C.L.). MEG devrait normalement pouvoir atteindre des sensibilités de l'ordre 10^{-13} sur les rapports de branchement. On remarque clairement la sensibilité hors norme des futures expériences $\mu - e$ conversion.

Mode	Limite sup.	Expérience	Réf.
$\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$	1.2×10^{-11}	MEGA	[43]
$\mu^+ \rightarrow e^+ e^+ e^-$	1.0×10^{-12}	SINDRUM I	[44]
$\tau^+ \rightarrow \mu^+ \gamma$	4.4×10^{-8}	BABAR	[45]
$\tau^+ \rightarrow e^+ \gamma$	3.3×10^{-8}	BABAR	[45]
$\tau^+ \rightarrow \mu^+ \mu^+ \mu^-$	3.2×10^{-8}	BELLE	[46]
$\tau^+ \rightarrow e^+ e^+ e^-$	3.6×10^{-8}	BELLE	[46]
$\tau^+ \rightarrow \mu^+ e^+ e^-$	2.7×10^{-8}	BELLE	[46]
$\tau^+ \rightarrow e^+ \mu^+ \mu^-$	3.7×10^{-8}	BABAR	[47]
$\tau^+ \rightarrow \mu^+ \mu^+ e^-$	2.3×10^{-8}	BELLE	[46]
$\tau^+ \rightarrow e^+ e^+ \mu^-$	2.0×10^{-8}	BELLE	[46]
$\mu^- Ti \rightarrow e^- Ti$	4.3×10^{-12}	SINDRUM II	[48]
$\mu^- Au \rightarrow e^- Au$	7×10^{-13}	SINDRUM II	[49]
$\mu^- Pb \rightarrow e^- Pb$	4.6×10^{-11}	SINDRUM II	[50]

TABLE 2.2 – Limites expérimentales supérieures de différents rapports de branchement, définis par $Br(l \rightarrow l' \gamma) = \frac{\Gamma(l \rightarrow l' \gamma)}{\Gamma_l}$, $Br(l \rightarrow h_1 h_2 h_3) = \frac{\Gamma(l \rightarrow h_1 h_2 h_3)}{\Gamma_l}$ et $Br_{\mu e} = \frac{\Gamma[\mu(N,Z) \rightarrow e(N,Z)]}{\Gamma[\mu(N,Z) \rightarrow capture]}$.

Mode	Sensibilité	Expérience	Réf.
$\mu \rightarrow e \gamma$	$\sim 10^{-13}$	MEG	[42]
$\tau \rightarrow \mu \gamma$	2.4×10^{-9}	SuperB	[51]
$\tau \rightarrow e \gamma$	3.0×10^{-9}	SuperB	[51]
$\tau \rightarrow lll$	$2.3 - 8.2 \times 10^{-10}$	SuperB	[51]
$\mu Ti \rightarrow e Ti$	$\sim 10^{-18}$	PRISM	[52],[41]
$\mu Al \rightarrow e Al$	$\sim 10^{-17}$	Mu2e	[53]
$\mu Al \rightarrow e Al$	$\sim 10^{-17}$	COMET	[52],[41]

TABLE 2.3 – Sensibilités attendues sur les rapports de branchement de futures expériences. Les rapports sont définis comme dans la Table 2.2.

2.3 Lagrangien effectif

Le Modèle Standard à basse énergie, pour $k \ll M_W$ où k désigne l'impulsion, peut être vu comme une théorie effective, la théorie V-A de Fermi, car le propagateur du boson massif W peut être développé comme :

$$\Delta_{\mu\nu}^W(k) = -\frac{g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{M_W^2}}{k^2 - M_W^2 + i\epsilon} \approx \frac{g_{\mu\nu}}{M_W^2} \quad (2.40)$$

L'interaction se réduit donc à un vertex effectif, comme illustré dans la Figure 2.1 ci-dessous. On peut faire de même dans notre cas. Soit \mathcal{M} l'ordre de grandeur des valeurs propres de la matrice M_N . A basse énergie $k \ll \mathcal{M}$, on peut développer le propagateur du neutrino lourd comme :

$$S^N(k) = \frac{1}{\not{k} - \mathcal{M} + i\epsilon} \approx -\frac{1}{\mathcal{M}} + \frac{1}{\mathcal{M}} \not{k} \frac{1}{\mathcal{M}} + \dots \quad (2.41)$$

Le premier terme de l'expansion va générer des masses pour les neutrinos, et le deuxième une correction à leur terme cinétique. En termes de diagrammes de Feynman, cela revient à considérer les diagrammes correctifs représentés à la Figure 2.2.

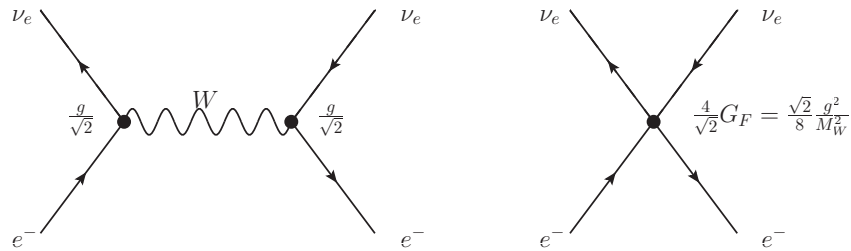


FIGURE 2.1 – Théorie effective de Fermi

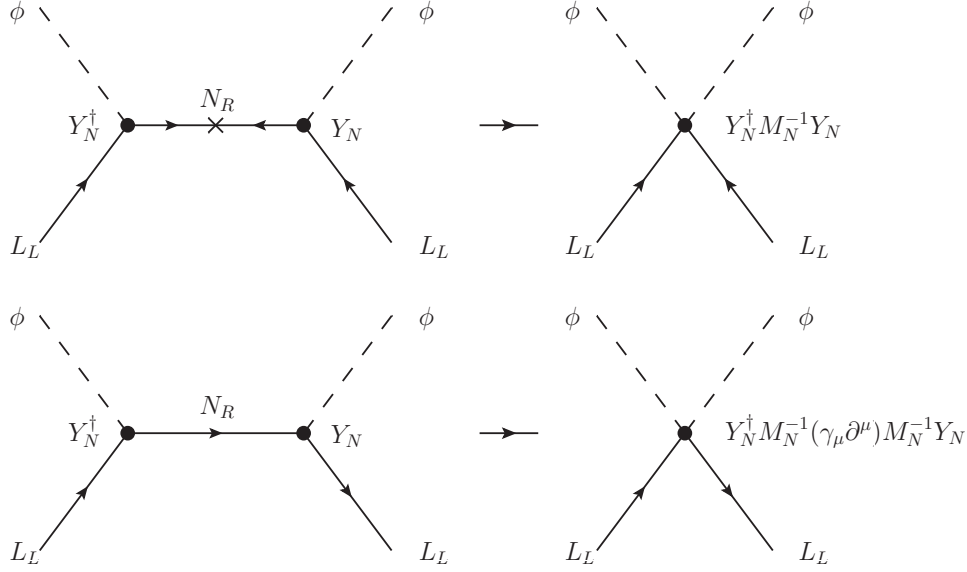


FIGURE 2.2 – Deux premières corrections de la théorie effective du modèle Seesaw Type-I.

Considérer la théorie effective dérivant du modèle Seesaw est très utile car celle-ci nous permettra de montrer que les processus qui changent la saveur sont dominés par les opérateurs de dimension six, issus du deuxième terme de l'expansion, qui ont un nombre fini de coefficients. Ceci nous permettra d'exploiter tous les effets du modèle Seesaw en terme d'un nombre fini de coefficients. Et de là, on pourra alors se poser la question si la connaissance de ces coefficients à partir des processus changeant la saveur permet de reconstruire le Lagrangien de départ.

Plus explicitement, à partir du Lagrangien complet :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{SM} + \mathcal{L}_N^{Type-I} \quad (2.42)$$

où \mathcal{L}_{SM} est le Lagrangien du Modèle Standard et :

$$\mathcal{L}_N^{Type-I} = i \overline{N_R} \not{\partial} N_R - \overline{L_L} \tilde{\phi} Y_N^\dagger N_R - \frac{1}{2} \overline{N_R} M_N N_R^c + h.c. \quad (2.43)$$

on peut construire une théorie effective valide à des énergies inférieures à \mathcal{M} . De manière générale, le Lagrangien effectif aura donc la forme d'une série en puissance de $1/\mathcal{M}$:

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_{SM} + \frac{1}{\mathcal{M}} \mathcal{L}^{d=5} + \frac{1}{\mathcal{M}^2} \mathcal{L}^{d=6} + \dots \equiv \mathcal{L}_{SM} + \delta \mathcal{L}^{d=5} + \delta \mathcal{L}^{d=6} + \dots \quad (2.44)$$

Dans [54], il a été montré que :

$$\delta \mathcal{L}^{d=5} = \frac{1}{2} c_{ij}^{d=5} \left(\overline{L_{Li}} \tilde{\phi}^* \right) \left(\tilde{\phi}^\dagger L_{Lj} \right) + h.c. \quad (2.45)$$

$$\delta \mathcal{L}^{d=6} = c_{ij}^{d=6} \left(\overline{L_{Li}} \tilde{\phi} \right) i \not{\partial} \left(\tilde{\phi}^\dagger L_{Lj} \right) \equiv c^{d=6} \mathcal{O}^{d=6} \quad (2.46)$$

où les coefficients sont donnés explicitement par ([29],[54]) :

$$c_{ij}^{d=5} = \left(Y_N^T \frac{1}{M_N} Y_N \right)_{ij} \quad (2.47)$$

$$c_{ij}^{d=6} = \left(Y_N^\dagger \frac{1}{M_N^\dagger} \frac{1}{M_N} Y_N \right)_{ij} \quad (2.48)$$

On retrouve sans surprise l'opérateur de Weinberg (1.30) pour $\delta\mathcal{L}^{d=5}$ qui, après brisure de symétrie, génère la matrice de masses des neutrinos $m_\nu = -\frac{v^2}{2} c^{d=5}$. À l'ordre suivant en $1/\mathcal{M}$, un seul opérateur est généré dû à l'échange d'un neutrino lourd N_R sans insertion de masse et donc ne violant pas L . Il donne le terme $\delta\mathcal{L}^{d=6}$, qui induit une correction au terme cinétique des neutrinos. En fait, on remarque que le coefficient $c^{d=6}$ associé à cet opérateur n'est rien d'autre que (2.13) à un facteur près :

$$\epsilon_N = \frac{v^2}{2} c^{d=6} \quad (2.49)$$

Les effets changeant la saveur leptonique sans briser L obtenus dans la théorie complète (qui s'y manifestent à travers les coefficients $\epsilon_{N_{ij}}$, voir (2.26)-(2.27)) se manifestent donc précisément au travers de cet opérateur $c^{d=6}$ dans la théorie effective.

Le Lagrangien effectif des neutrinos légers s'exprime donc au deuxième ordre en $1/\mathcal{M}$, après brisure de symétrie :

$$\mathcal{L}_\nu^{eff} = i \overline{\nu_{Li}} \not{\partial} (\delta_{ij} + \epsilon_{N,ij}) \nu_{Lj} - \frac{1}{2} \overline{\nu_{Li}^c} m_{\nu,ij} \nu_{Lj} - \frac{1}{2} \overline{\nu_{Li}} m_{\nu,ij}^* \nu_{Lj}^c \quad (2.50)$$

On retrouve le même scénario que dans la section précédente, mais concernant uniquement les neutrinos légers, en ce sens où on ne connaît pas la forme explicite de la matrice $(n + n') \times (n + n')$ de mélange U . Une redéfinition des champs des neutrinos légers de manière à ce que le terme cinétique soit correctement normalisé, suivi d'une diagonalisation de la matrice de masse des neutrinos légers, permet de trouver les états propres de masse ainsi que la matrice de changement de base entre états propres de saveur et de masse des neutrinos légers, qui s'exprime :

$$U_{eff} = \left(1 - \frac{\epsilon_N}{2} \right) U_{PMNS} \quad (2.51)$$

On retrouve bien le premier bloc de la matrice U (2.20). U_{eff} n'est pas unitaire, seule la matrice U complète l'est. Comme dans la théorie complète, les courants chargés et neutres impliquant des neutrinos sont modifiés. Avec $\mathbf{e}_{Li} = V_{Lij} e_{Lj}$ et ν_i les états propres de masse

des leptons chargés et des neutrinos, ils deviennent :

$$\mathcal{L}_{CC}^W = \frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^- \sum_{i,j}^n \bar{e}_{Li} \gamma^\mu (V_L^\dagger U_{eff})_{ij} \nu_j \quad (2.52)$$

$$\mathcal{L}_{NC}^Z = \frac{g}{\cos \theta_W} W_\mu^- \sum_{i,j}^n \frac{1}{2} \bar{\nu}_i \gamma^\mu (U_{eff}^\dagger U_{eff})_{ij} \nu_j \quad (2.53)$$

où $\nu_i^c = \nu_i$ et ce sont des particules de Majorana. On remarque que les interactions ne sont plus diagonales, ce qui implique l'existence de processus tels que $\mu \rightarrow e \gamma^2$. Les processus violant la saveur proviennent donc de l'opérateur $\mathcal{O}^{d=6}$, et leurs amplitudes sont proportionnelles aux coefficients de la matrice $c^{d=6}$, qui est une matrice $n \times n$. Ceci implique que tous les processus avec une transition $\mu \rightarrow e$ par exemple sont proportionnels au carré de l'unique coefficient $[\epsilon_N]_{e\mu} = \frac{v^2}{2} c_{e\mu}^{d=6}$, et sont donc quartiques en les couplages de Yukawa Y_N et supprimés par un facteur $1/M_N^4$. En prenant par exemple un rapport $Br(\mu \rightarrow e\gamma)/Br(\mu \rightarrow eee)$, on peut obtenir une expression indépendante des couplages de Yukawa, ce qui sera important dans le chapitre suivant pour reconstruire le Lagrangien.

Tout comme dans la théorie V-A de Fermi, la théorie effective limitée au premier ordre (i.e. uniquement avec la correction $\delta\mathcal{L}^{d=5}$) ne permet en aucun cas de "rouvrir la boîte", c'est-à-dire qu'on ne sait à priori rien dire sur les paramètres Y_N et M_N de la théorie de haute énergie, ni sur le type de Seesaw. En effet, chaque type de Seesaw génère une matrice de masse des neutrinos, et la connaissance de cette dernière ne détermine pas si le mécanisme original est un Seesaw Type-I, II ou III. En d'autres termes, chaque modèle Seesaw pourrait induire n'importe quelle matrice de masse des neutrinos susceptible d'être observée. Cependant, le deuxième ordre de la théorie effective fournit plus d'information, et sa forme permet de distinguer les types de Seesaw, comme illustré dans la Table 2.4 ci-dessous, où $\mathcal{O}^{d=6}$ désigne l'opérateur associé au coefficient $c^{d=6}$, c'est-à-dire :

$$\delta\mathcal{L}^{d=6} = c_i^{d=6} \mathcal{O}_i^{d=6} \quad (2.54)$$

Clairement, les coefficients $c^{d=5}$ et $c^{d=6}$ dépendent du modèle considéré, et leur connaissance permet de distinguer les modèles Seesaw. En effet, l'opérateur $\mathcal{O}^{d=6}$ du modèle Seesaw Type-II est tout à fait différent des deux autres modèles. Quant aux modèles Seesaw Type-I et Type-III, il est possible de les distinguer via la dérivée covariante, qui induit des interactions de jauge supplémentaires. En particulier, les états triplets chargés Σ^\pm du modèle Seesaw Type-III se mélangent directement avec les leptons chargés, ce qui permet aux processus comme $l \rightarrow l'\gamma$ d'être à l'ordre arbre (ils ne sont pas obligés de passer par une transition $\nu_l \rightarrow \nu_{l'}$) et d'être ainsi plus faciles à observer.

2. Notons que si $V_L = \mathbb{1}$, l'amplitude d'un vertex violant la saveur leptonique $l \rightarrow \nu_{l'} W^-$ où $l \neq l'$ est proportionnel à $[\epsilon_N]_{l'l}$.

On peut cependant se poser la question suivante : la connaissance des coefficients $c^{d=5}$ et $c^{d=6}$ suffit-elle pour reconstruire l'ensemble des paramètres de Y_N et M_N ?

Modèle	$c^{d=5}$	$c_i^{d=6}$	$\mathcal{O}_i^{d=6}$
Type-I	$Y_N^T \frac{1}{M_N} Y_N$	$\left(Y_N^\dagger \frac{1}{M_N^\dagger} \frac{1}{M_N} Y_N \right)_{ij}$	$(\overline{L_{Li}} \tilde{\phi}) i \not{D} (\tilde{\phi}^\dagger L_{Lj})$
Type-II	$4Y_\Delta \frac{\mu_\Delta}{M_\Delta^2}$	$\frac{1}{M_\Delta^2} Y_{\Delta ij} Y_{\Delta kl}^\dagger$	$(\overline{L_{Li}} \vec{\sigma} L_{Lj}) (\overline{L_{Li}} \vec{\sigma} L_{Lj})$
		$\frac{ \mu_\Delta ^2}{M_\Delta^4}$	$(\phi^\dagger \vec{\sigma} \tilde{\phi}) (D_\mu D^\mu) (\tilde{\phi}^\dagger \vec{\sigma} \phi)$
		$-2(\lambda_3 + \lambda_5) \frac{ \mu_\Delta ^2}{M_\Delta^4}$	$(\phi^\dagger \phi)^3$
Type-III	$Y_\Sigma^T \frac{1}{M_\Sigma} Y_\Sigma$	$\left(Y_\Sigma^\dagger \frac{1}{M_\Sigma^\dagger} \frac{1}{M_\Sigma} Y_\Sigma \right)_{ij}$	$(\overline{L_{Li}} \vec{\sigma} \tilde{\phi}) i \not{D} (\tilde{\phi}^\dagger \vec{\sigma} L_{Lj})$

TABLE 2.4 – Coefficients $c^{d=5}$ et $c^{d=6}$ des théories Seesaw Type-I, II et III.

2.4 Reconstruction du Lagrangien complet à partir du Lagrangien effectif

Dans cette section, nous nous posons la question suivante : est-il possible de retrouver les valeurs des paramètres du Lagrangien de haute énergie (2.1) à partir des paramètres contenus dans le Lagrangien effectif (2.50) ? En d'autres termes, supposons que l'on connaisse $c^{d=5}$ à partir des masses de neutrinos, et $c^{d=6}$ à partir des processus tels que $l \rightarrow l' \gamma$, pouvons-nous reconstruire les matrices de Yukawa Y_N et la matrice de masse des neutrinos lourds M_N ? Cette question a déjà été abordée dans l'article [31], dont nous suivrons le raisonnement, mais certains points demandent à être précisés. Pour répondre à la question, nous comparons dans un premier temps le nombre de paramètres dans chacun des Lagrangiens, une condition nécessaire étant $N_{LE} \geq N_{HE}$, où N_{LE} désigne le nombre de paramètres du Lagrangien effectif de basse énergie (à l'ordre $1/\mathcal{M}^2$) et N_{HE} le nombre de paramètres du Lagrangien complet de haute énergie. Nous proposons ensuite une méthode de reconstruction explicite.

Comptage des paramètres

Revenons au Lagrangien général (2.1) introduit au début du chapitre. On remarque que le Lagrangien cinétique des leptons (2.2) est invariant sous les transformations combinées

des champs :

$$L_L \rightarrow L'_L \equiv V_\ell L_L \quad (2.55)$$

$$e_R \rightarrow e'_R \equiv V_e e_R \quad (2.56)$$

$$N_R \rightarrow N'_R \equiv V_N N_R \quad (2.57)$$

Ceci nous permet d'éliminer des paramètres non physiques dans les matrices de Yukawa et de Majorana (2.3), i.e. dans les termes de masse. Sous les transformations ci-dessus ces matrices deviennent :

$$Y_e \rightarrow Y'_e \equiv V_e^\dagger Y_e V_\ell \quad (2.58)$$

$$Y_N \rightarrow Y'_N \equiv V_N^\dagger Y_N V_\ell \quad (2.59)$$

$$M_N \rightarrow M'_N \equiv V_N^\dagger M_N V_N^* \quad (2.60)$$

où V_ℓ et V_e sont des matrices unitaires $n \times n$, et V_N est une matrice unitaire $n' \times n'$. Pour rappel, n est le nombre de neutrinos gauches, et n' est le nombre de neutrinos droits. Une redéfinition des champs permet donc d'éliminer un certain nombre de paramètres dans les matrices de Yukawa et de Majorana. On déduit par comptage le nombre de paramètres physiques N_{HE} qui subsistent, voir Table 2.5 ci-dessous. C'est-à-dire $n+n'+nn'$ paramètres réels et $n(n'-1)$ phases.

Matrice	Modules	Phases
Y_e	$n \times n$	$n \times n$
Y_N	$n \times n'$	$n \times n'$
M_N (symétrique)	$\frac{n'(n'+1)}{2}$	$\frac{n'(n'+1)}{2}$
V_e (unitaire)	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n+1)}{2}$
V_ℓ (unitaire)	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n+1)}{2}$
V_N (unitaire)	$\frac{n'(n'-1)}{2}$	$\frac{n'(n'+1)}{2}$
N_{HE}	$n + n' + nn'$	$n(n' - 1)$

TABLE 2.5 – Comptage des paramètres du Lagrangien Seesaw Type-I

Par exemple, si on prend $n = n' = 3$, on a au départ 9 modules et 9 phases dans chaque matrice Y_e , Y_N et M_N . Après diagonalisation des matrices de masse des leptons chargés et des neutrinos droits, il ne reste plus que 3 paramètres réels dans Y_e et dans M_N , mais encore 9 paramètres complexes dans Y_N . Cependant, on a encore la liberté de redéfinir les phases des doublets L_L , ce qui permet d'éliminer 3 phases dans la matrice Y_N . Il ne reste donc finalement "que" 15 paramètres réels et 6 phases physiques. Ce nombre assez élevé de paramètres est à l'origine du fait que les modèles Seesaw sont si difficiles à tester et à distinguer les uns des autres. Pour rappel, la matrice de masse des neutrinos ne contient

que 9 paramètres (6 modules et 3 phases).

Le Lagrangien cinétique effectif (2.44) est quant à lui invariant sous les transformations :

$$L_L \rightarrow L'_L \equiv V_\ell L_L \quad (2.61)$$

$$e_R \rightarrow e'_R \equiv V_e e_R \quad (2.62)$$

Il est alors possible d'éliminer un certain nombre de paramètres dans les coefficients $c^{d=5}$ et $c^{d=6}$, qui deviennent sous ces transformations :

$$c^{d=5} \rightarrow c^{d=5'} \equiv V_\ell^T c^{d=5} V_\ell \quad (2.63)$$

$$c^{d=6} \rightarrow c^{d=6'} \equiv V_\ell^\dagger c^{d=6} V_\ell \quad (2.64)$$

Ces transformations sont bien consistantes avec (2.55-2.57) car sous celles-ci :

$$c^{d=5} \rightarrow c^{d=5'} = Y_N'^T \frac{1}{M_N'^\dagger} Y_N' = V_\ell^T Y_N^T M_N^{-1} Y_N V_\ell = V_\ell^T c^{d=5} V_\ell \quad (2.65)$$

$$c^{d=6} \rightarrow c^{d=6'} = Y_N'^\dagger \frac{1}{M_N'^\dagger} \frac{1}{M_N'} Y_N' = V_\ell^\dagger Y_N^\dagger \frac{1}{M_N^\dagger} \frac{1}{M_N} Y_N V_\ell = V_\ell^\dagger c^{d=6} V_\ell \quad (2.66)$$

Il est donc possible d'éliminer des paramètres des coefficients $c^{d=5}$ et $c^{d=6}$ en redéfinissant les champs dans le Lagrangien effectif. Un comptage nous permet de connaître le nombre de paramètres physiques N_{LE} qui subsistent, voir Table 2.6 ci-dessous. C'est-à-dire $n(n+2)$ paramètres réels et $n(n-1)$ phases.

Matrice	Modules	Phases
Y_e	$n \times n$	$n \times n$
$c^{d=5}$ (symétrique)	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{n(n+1)}{2}$
$c^{d=6}$ (hermitienne)	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$
V_e (unitaire)	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n+1)}{2}$
V_ℓ (unitaire)	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n+1)}{2}$
N_{LE}	$n(n+2)$	$n(n-1)$

TABLE 2.6 – Comptage des paramètres du Lagrangien effectif

On en déduit que si $c^{d=5} \neq 0$ et $c^{d=6} \neq 0$ dans le Lagrangien effectif, alors :

$$N_{LE} = N_{HE} \quad \text{pour } n = n', \quad (2.67)$$

$$N_{LE} < N_{HE} \quad \text{pour } n < n', \quad (2.68)$$

$$N_{LE} > N_{HE} \quad \text{pour } n > n'. \quad (2.69)$$

En d'autres termes, si le nombre n' de neutrinos droits est plus petit ou égal au nombre n de neutrinos gauches, le nombre de paramètres dans le Lagrangien effectif est plus grand ou égal au nombre de paramètres dans la théorie de départ. Ceci permet donc en principe une reconstruction du Lagrangien général de départ à partir des coefficients $c^{d=5}$ et $c^{d=6}$ de la théorie effective. Cependant, ce n'est pas si simple en pratique. En effet, nous verrons par la suite qu'il existe des situations non idéales où il n'est pas possible de reconstruire M_N .

Connexion entre les paramètres de la théorie de haute et de basse énergie

Soit :

$$\begin{cases} m_\nu & \equiv -\frac{v^2}{2}c^{d=5} = -\frac{v^2}{2} [Y_N^T M_N^{-1} Y_N] \\ \lambda & \equiv \frac{v^2}{2}c^{d=6} = \frac{v^2}{2} [Y_N^\dagger M_N^{-2} Y_N] = \frac{v^2}{2} [(M_N^{-1} Y_N)^\dagger (M_N^{-1} Y_N)] \end{cases} \quad (2.70)$$

Définissons :

$$\chi = -\frac{v}{\sqrt{2}} M_N^{-1} Y_N \quad (2.71)$$

tel que :

$$\lambda = \chi^\dagger \chi \quad (2.72)$$

χ est une matrice $n' \times n$. Nous supposons dans ce qui suit $n = 3$, i.e. il y a trois familles de neutrinos légers. On remarque que λ est invariant sous une transformation $\chi \rightarrow U\chi$ où $U \in U(n')$.

Comme M_N^{-1} est inversible, le rang de χ est le même que le rang de Y_N . Or, si la matrice Y_N est de rang n' , alors il existe une matrice $(3 \times n')$, $Y_{N,R}^{-1}$ telle que :

$$Y_N Y_{N,R}^{-1} = \mathbb{1}_{n' \times n'} \quad (2.73)$$

donnée par :

$$Y_{N,R}^{-1} = Y_N^T (Y_N Y_N^T)^{-1} \quad (2.74)$$

Il existe donc une matrice χ_R^{-1} telle que $\chi \chi_R^{-1} = \mathbb{1}_{n' \times n'}$. Elle est donnée par :

$$\chi_R^{-1} = -\frac{\sqrt{2}}{v} Y_{N,R}^{-1} M_N \quad (2.75)$$

Puisque Y_N est de rang n' , il en va de même pour Y_N^T et il est donc possible de trouver une matrice $Y_{N,L}^{T,-1}$ telle que :

$$Y_{N,L}^{T,-1} Y_N^T = \mathbb{1}_{n' \times n'} \quad (2.76)$$

qui est donnée par :

$$Y_{N,L}^{T,-1} = (Y_N Y_N^T)^{-1} Y_N = (Y_{N,R}^{-1})^T \quad (2.77)$$

Il existe donc une matrice χ_L^{-1} telle que $\chi_L^{T,-1} \chi^T = \mathbb{1}_{3 \times 3}$. Elle est en fait donnée par :

$$\chi_L^{T,-1} = (\chi_R^{-1})^T \quad (2.78)$$

La matrice M_N peut alors être entièrement reconstruite :

$$- (\chi_R^{-1})^T m_\nu \chi_R^{-1} = M_N (Y_{N,R}^{-1})^T Y_N^T M_N^{-1} Y_N Y_{N,R}^{-1} M_N = M_N \quad (2.79)$$

De même, on peut reconstruire Y_N . On obtient :

$$\begin{cases} M_N &= - (\chi_R^{-1})^T m_\nu \chi_R^{-1} \\ Y_N &= \frac{\sqrt{2}}{v} (\chi_R^{-1})^T m_\nu \end{cases} \quad (2.80)$$

Nous voyons donc qu'il est possible de reconstruire les paramètres du Lagrangien haute énergie ssi Y_N est de rang n' , et à condition de savoir déterminer χ à partir de $c^{d=6}$, Eq. (2.72), ce qui n'est à priori pas trivial³. Analysons les différents cas $n' = 1$, $n' = 2$ et $n' = 3$.

n'=1

Comme λ est invariant sous une transformation $\chi \rightarrow \chi' = U \chi$ où $U \in U(1)$, il est possible d'éliminer une phase dans χ qui peut s'exprimer :

$$\chi = \begin{pmatrix} |a| & b & c \end{pmatrix} \quad \text{où } a, b, c \in \mathbb{C} \quad (2.81)$$

Alors :

$$\chi^\dagger \chi = \begin{pmatrix} |a|^2 & |a|b & |a|c \\ b^*|a| & |b|^2 & b^*c \\ c^*|a| & c^*b & |c|^2 \end{pmatrix} \quad (2.82)$$

3. Notons que dans l'article [31] est proposé une reconstruction explicite de χ :

$$\chi = W \sqrt{\lambda_{diag,real}} V_N^T$$

où $\lambda_{diag,real} = W^\dagger \lambda W$ est diagonale, et V_N^T est la matrice qui diagonalise M_N . Cette expression n'a fondamentalement de sens que lorsque $n = n'$. En effet, si $n = 3$ et $n' = 2$, V_N est une matrice 2×2 , alors que λ est une matrice 3×3 . La connexion entre les paramètres du Lagrangien effectif et les paramètres du Lagrangien complet n'est donc valable dans l'article que si $n = n'$. Nous proposons ici une reconstruction générale.

Reconstruction du Lagrangien complet à partir du Lagrangien effectif

et nous avons donc les relations :

$$a = |a| = \sqrt{|\lambda_{11}|} \quad ; \quad b = |b|e^{i\theta_b} = \frac{\lambda_{12}}{\sqrt{|\lambda_{11}|}} \quad ; \quad c = |c|e^{i\theta_c} = \frac{\lambda_{13}}{\sqrt{|\lambda_{11}|}} \quad (2.83)$$

On sait donc reconstruire χ à partir de la connaissance de λ , et via les relations (2.80) on peut reconstruire les paramètres du Lagrangien général.

n'=2

λ étant invariant sous une transformation $\chi \rightarrow \chi' = U \chi$ avec $U \in U(2)$, il est possible d'éliminer un module et trois phases dans χ , qui peut donc se mettre sous la forme :

$$\chi = \begin{pmatrix} |a| & b & c \\ 0 & |e| & f \end{pmatrix} \quad (2.84)$$

ce qui donne :

$$\chi^\dagger \chi = \begin{pmatrix} |a|^2 & |a|b & |a|c \\ b^*|a| & |b|^2 + |e|^2 & b^*c + |e|f \\ c^*|a| & c^*|b| + f^*|e| & |c|^2 + |f|^2 \end{pmatrix} \quad (2.85)$$

et nous avons donc les relations :

$$a = |a| = \sqrt{|\lambda_{11}|} \quad ; \quad b = |b|e^{i\theta_b} = \frac{\lambda_{12}}{\sqrt{|\lambda_{11}|}} \quad ; \quad c = |c|e^{i\theta_c} = \frac{\lambda_{13}}{\sqrt{|\lambda_{11}|}} \quad (2.86)$$

$$e = |e| = \sqrt{\lambda_{22} - |b|^2} \quad ; \quad f = |f|e^{i\theta_f} = \frac{1}{|e|} (\lambda_{23} - b^*c) \quad (2.87)$$

Ici aussi, il est possible de reconstruire χ à partir de la connaissance de λ , et les paramètres du Lagrangien général peuvent être reconstruits via les relations (2.80).

n'=3

λ est invariant sous $\chi \rightarrow \chi' = U \chi$ avec $U \in U(3)$ et il est donc possible d'éliminer trois modules et six phases dans χ , qu'on choisit de mettre sous la forme :

$$\chi = \begin{pmatrix} |a| & b & c \\ 0 & |e| & f \\ 0 & 0 & |i| \end{pmatrix} \quad (2.88)$$

Alors :

$$\chi^\dagger \chi = \begin{pmatrix} |a|^2 & |a|b & |a|c \\ b^*|a| & |b|^2 + |e|^2 & b^*c + |e|f \\ c^*|a| & c^*b + f^*|e| & |c|^2 + |f|^2 + |i|^2 \end{pmatrix} \quad (2.89)$$

et nous avons alors les relations :

$$a = |a| = \sqrt{|\lambda_{11}|} \quad ; \quad b = |b|e^{i\theta_b} = \frac{\lambda_{12}}{\sqrt{|\lambda_{11}|}} \quad ; \quad c = |c|e^{i\theta_c} = \frac{\lambda_{13}}{\sqrt{|\lambda_{11}|}} \quad (2.90)$$

$$e = |e| = \sqrt{\lambda_{22} - |b|^2} \quad ; \quad f = |f|e^{i\theta_f} = \frac{1}{|e|} (\lambda_{23} - b^*c) \quad (2.91)$$

$$i = |i| = \sqrt{\lambda_{33} - |c|^2 - |f|^2} \quad (2.92)$$

χ peut donc être reconstruit, et il est possible de retrouver les paramètres du Lagrangien complet via les relations (2.80). Remarquons que dans ce cas-ci, il est possible de construire χ à partir de la diagonalisation de λ [31]. En effet, soit :

$$\lambda_{diag, reel} = W^\dagger \lambda W \quad (2.93)$$

alors une solution générale pour χ est donnée par :

$$\chi = \sqrt{\lambda_{diag, reel}} W^\dagger \quad (2.94)$$

2.5 Conclusion du chapitre 2

Résumons les résultats obtenus dans cette section. Nous avons dans un premier temps introduit la forme du Lagrangien du modèle Seesaw Type-I, à partir de laquelle nous avons trouvé l'expression générale des valeurs propres et vecteurs propres de la matrice de masse des neutrinos, ainsi que la matrice unitaire de diagonalisation. Nous avons alors vu comment cette dernière modifie les interactions avec les bosons W et Z , et avons introduit les expressions des rapports de branchement $Br(l \rightarrow l'\gamma)$, $Br(l \rightarrow l'l'l')$ et $Br_{\mu e}(N, Z)$ qui en découlent.

Comme l'échelle \mathcal{M} de la nouvelle physique à l'origine du mécanisme Seesaw est supposée plus grande ou égale à l'échelle électrofaible, nous avons introduit le Lagrangien effectif, qui est le développement en puissance de $1/\mathcal{M}$ du Lagrangien complet. Nous avons ensuite vu que le Lagrangien effectif tronqué au deuxième ordre est caractérisé par deux matrices 3×3 , $c^{d=5}$ et $c^{d=6}$. Il permet de différencier les trois types de modèles Seesaw car les opérateurs induits à l'ordre $1/\mathcal{M}^2$ sont différents dans chaque modèle. Les coefficients $c^{d=6}$ sont précisément ceux qui induisent les processus changeant la saveur.

Conclusion du chapitre 2

Pour finir, nous avons abouti à une méthode systématique permettant de savoir si il est possible de reconstruire l'ensemble des N_{HE} paramètres du modèle Seesaw Type-I à partir des N_{LE} paramètres de la théorie effective. Nous avons trouvé que lorsque $c^{d=5} \neq 0$ et $c^{d=6} \neq 0$, la connaissance de tous les paramètres du Lagrangien effectif, i.e. les coefficients $c^{d=5}$ et $c^{d=6}$, est en principe suffisante pour reconstruire les paramètres du Lagrangien complet, i.e. Y_N et M_N , ssi :

1. $n' \leq n$, de manière à ce que $N_{LE} \geq N_{HE}$,
2. Y_N est de rang n' , ce qui est nécessaire pour la reconstruction. Plus précisément, cette condition assure l'existence de la matrice χ_R^{-1} telle que $\chi\chi_R^{-1} = \mathbb{1}_{n' \times n'}$.

Si ces conditions sont satisfaites, alors les matrices M_N et Y_N sont données par :

$$\begin{cases} M_N &= -(\chi_R^{-1})^T m_\nu \chi_R^{-1} \\ Y_N &= \frac{\sqrt{2}}{v} (\chi_R^{-1})^T m_\nu \end{cases} \quad (2.95)$$

où χ_R^{-1} est l'inverse à droite de la matrice χ :

$$\chi = -\frac{v}{\sqrt{2}} M_N^{-1} Y_N \quad (2.96)$$

et m_ν est la matrice de masse des neutrinos, reliée à $c^{d=5}$ par :

$$m_\nu = -\frac{v^2}{2} c^{d=5} \quad (2.97)$$

Nous avons finalement montré que χ peut être reconstruit explicitement à partir de λ :

$$\lambda = \frac{v^2}{2} c^{d=6} = \frac{v^2}{2} [Y_N^\dagger M_N^{-2} Y_N] = \chi^\dagger \chi \quad (2.98)$$

dans le cas où $n = 3$ et pour $n' = 1, 2$ et 3 .

Nous allons dans le chapitre suivant appliquer ces résultats à l'analyse de modèles Seesaw Type-I particuliers.

3 Étude de modèles minimaux

3.1 Motivations

Dans cette section, nous faisons l'analyse de quelques modèles Seesaw Type-I. Comme il faut introduire au minimum deux neutrinos droits pour être en accord avec les données expérimentales, nous commençons par analyser des structures avec deux neutrinos droits. Parmi celles-ci, certaines aboutissent naturellement à de grands coefficients $c^{d=6}$ tout en assurant de faibles masses pour les neutrinos.

En effet, à partir des équations (2.47) et (2.48), on remarque que sans structure particulière des matrices Y_N et M_N , le coefficient $c^{d=5}$ est supprimé en $\sim Y_N^2/M_N$, et $c^{d=6}$ est supprimé en $\sim Y_N^2/M_N^2$. Or, comme l'amplitude de processus violant la saveur leptonique est proportionnelle à $\epsilon_N = v^2/2 c^{d=6}$, ces derniers seront fortement supprimés puisque $\epsilon_N \sim c^{d=5}/M_N \sim m_\nu/M_N$. Par exemple, si on suppose $m_\nu \sim 0.1$ eV et $Y_N \sim 10^{-5}$, alors $M_N \sim 10^4$ GeV et donc $\epsilon_N \sim 10^{-14}$, i.e. la probabilité d'observer un jour de tels processus est quasi nulle. Cependant, des modèles dits "Seesaw Inverses" ont suscité un intérêt grandissant ces dernières années par le fait qu'ils génèrent naturellement de grands ϵ_N tout en permettant de faibles masses pour les neutrinos et en violant un minimum le nombre leptonique. En effet, les coefficients $c^{d=5}$ et $c^{d=6}$ ne font pas intervenir les couplages de Yukawas dans des combinaisons identiques, et il existe en fait une différence essentielle entre eux : si $c^{d=5}$ brise le nombre leptonique L , il n'en va pas de même pour $c^{d=6}$. On pourrait donc, sur base d'un principe de symétrie comme la conservation approximative du nombre leptonique L , penser à des modèles avec de grands couplages de Yukawa Y_N et $M_N \neq 0$ (i.e. de grands coefficients $c^{d=6}$) sans pour autant briser L (i.e. sans pour autant générer de grandes masses de neutrinos m_ν). Les masses des neutrinos peuvent alors être obtenues en ajoutant des perturbations brisant L .

L'exigence de grands ϵ_N impliquent nécessairement des structures particulières pour la matrice de masse des neutrinos. En fait, on peut montrer à partir de considérations simples qu'il n'y a qu'une structure générale possible permettant d'avoir des grands

couplages de Yukawa avec trois neutrinos droits massifs et trois neutrinos sans masse [29] :

$$M_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ a & b & c & d & e & f \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f & 0 & g \end{pmatrix} \quad M_N = \begin{pmatrix} d & e & f \\ e & 0 & 0 \\ f & 0 & g \end{pmatrix} \quad Y_N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

où a, \dots, g sont des paramètres complexes. Un seul neutrino droit se couple aux neutrinos légers au premier ordre. En d'autres termes, cette structure permet d'avoir des coefficients ϵ_N aussi grands que désiré sans pour autant générer des grandes masses de neutrinos, qu'on génère alors en introduisant des perturbations. Pour le cas $d = f = 0$, une telle structure peut se justifier par la conservation du nombre leptonique. En effet, il existe un choix possible pour le nombre leptonique des neutrinos droits, $L_{\nu_e} = L_{\nu_\mu} = L_{\nu_\tau} = L_{N_1} = -L_{N_2} = 1$ et $L_{N_3} = 0$, qui mène à cette structure. Le cas $d \neq 0$ et $f \neq 0$ est le cas le plus général : il brise L mais n'induit pas de masse de neutrinos car la matrice M_ν est de rang 3, et a donc 3 valeurs propres nulles. Afin de générer des masses pour les neutrinos légers, on introduit des petites perturbations :

$$M_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a & \epsilon_1 & \epsilon_2 \\ 0 & 0 & 0 & b & \epsilon_3 & \epsilon_4 \\ 0 & 0 & 0 & c & \epsilon_5 & \epsilon_6 \\ a & b & c & d & e & f \\ \epsilon_1 & \epsilon_3 & \epsilon_5 & e & \epsilon_7 & \epsilon_8 \\ \epsilon_2 & \epsilon_4 & \epsilon_6 & f & \epsilon_8 & g \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Pour avoir deux (trois) neutrinos légers massifs, au moins un (deux) ϵ_i parmi $\epsilon_{1,\dots,7}$ doit être non nul. La particularité de toutes ces configurations possibles est donc qu'elles découplent les coefficients $c^{d=5}$ et $c^{d=6}$, i.e. $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} c^{d=5} = 0$ et $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} c^{d=6} \neq 0$. De plus, elles mènent à des possibilités de tests sur l'origine des masses de neutrinos à partir des processus violant la saveur leptonique, tout en garantissant une faible masse de neutrinos.

Ici, nous allons surtout analyser des modèles avec deux neutrinos droits. Notamment le modèle Minimal Flavor Violation (MFV), qui est basé sur la considération que le nombre leptonique est approximativement conservé, i.e. de manière générale $d \ll e$. Nous enchaînerons ensuite avec le cas général avec trois neutrinos droits (3.2), aussi sous l'hypothèse que le nombre leptonique est approximativement conservé $d, f \ll e, g$.

3.2 Modèles avec deux neutrinos droits

3.2.1 Introduction

Dans ce cas, la matrice (3.2) se réduit à :

$$M_\nu = \begin{pmatrix} 0 & m_D^T & \varepsilon m_D'^T \\ m_D & d & e \\ \varepsilon m_D' & e & \varepsilon_7 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad m_D^T = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} ; \quad \varepsilon m_D'^T = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_5 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

et $\varepsilon \ll 1$. Notons que $Y_N^T = (Y^T \ \varepsilon Y'^T)$. Si le nombre leptonique est conservé, alors $d = \varepsilon_7 = \varepsilon Y' = 0$, et la matrice possède 3 valeurs propres nulles, i.e. pas de masse pour les neutrinos. Supposons donc que la symétrie associée au nombre leptonique soit brisée par des petites quantités, en toute généralité, on demande $\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_5, \varepsilon_7, d \ll a, b, c, e$. On obtient alors le modèle Minimal Flavor Violation (MFV) [55] :

$$M_\nu = \begin{pmatrix} 0 & Y^T \frac{v}{\sqrt{2}} & \varepsilon Y'^T \frac{v}{\sqrt{2}} \\ Y \frac{v}{\sqrt{2}} & \mu' & \Lambda \\ \varepsilon Y' \frac{v}{\sqrt{2}} & \Lambda & \mu \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad Y^T = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y'^T = \begin{pmatrix} Y'_1 \\ Y'_2 \\ Y'_3 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

où $\mu, \mu' \ll \Lambda, v$ et $\varepsilon \ll 1$. Ce modèle est appelé MFV car il permet de reconstruire toute la structure de saveur du Lagrangien initial à partir de la connaissance de la matrice de masses des neutrinos. Nous allons dans un premier temps analyser ce modèle dans le cas où $\mu = \mu' = 0$. Nous verrons alors qu'en plus de la structure de saveur, on peut reconstruire les coefficients de normalisation, i.e. le Lagrangien total peut être déterminé. Nous enchaînerons ensuite avec le cas général.

Si, en plus de supposer cette structure générale pour la matrice de masse, on impose une structure particulière des Yukawa ([56],[57],[58]), il est possible de trouver un modèle encore plus minimal et contraint. Nous envisagerons dans la deuxième partie de ce chapitre la structure de Yukawa particulière :

$$Y = y \begin{pmatrix} 0 & s & c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y' = y' \begin{pmatrix} \alpha e^{i\phi} & \beta & \gamma \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

où $c = \cos \theta$ et $s = \sin \theta$; α, β, γ sont des paramètres réels tels que $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$; y et y' sont des paramètres réels de normalisation. Pourquoi une telle structure? Parce qu'à notre connaissance, il n'existe pas de structure plus minimale que celle-là en terme de nombre de paramètres qui mène à des processus non négligeables changeant la saveur leptonique et qui ne soit pas exclu par les données observationnelles actuelles¹. Nous

1. Il existe cependant d'autres modèles (avec une autre forme pour M_N et Y_N) avec un nombre identique de paramètres indépendants en accord avec les données expérimentales actuelles, voir par

terminerons ensuite la section par l'analyse de quelques modèles non minimaux avec cette même structure des matrices de Yukawa. Ceci nous permettra de dégager une relation générique entre paramètres d'oscillation qui pourra être testée dans un futur proche.

3.2.2 Analyse du modèle Minimal Flavor Violation, cas où $\mu = \mu' = 0$

Nous allons calculer en détail les coefficients $c^{d=5}$, $c^{d=6}$ ainsi que la matrice unitaire U de diagonalisation de la matrice des masses, en appliquant la théorie introduite à la section 2.1. On analysera alors les différentes prédictions qui en résultent. On abordera pour finir la question de la reconstruction des paramètres du Lagrangien à partir des coefficients $c^{d=5}$ et $c^{d=6}$.

Coefficients $c^{d=5}$, $c^{d=6}$ et matrice U

Soit la matrice de masse des neutrinos suivante :

$$M_\nu = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & Y^T \frac{v}{\sqrt{2}} & \varepsilon Y'^T \frac{v}{\sqrt{2}} \\ Y \frac{v}{\sqrt{2}} & 0 & \Lambda \\ \varepsilon Y' \frac{v}{\sqrt{2}} & \Lambda & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & m_D^T & \varepsilon m_D'^T \\ m_D & 0 & \Lambda \\ m_D' & \Lambda & 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

avec $\varepsilon \ll 1$ et où $m_D = Y \frac{v}{\sqrt{2}}$ et $m_D' = Y' \frac{v}{\sqrt{2}}$ pour alléger les notations. Nous avons la liberté de redéfinir les neutrinos droits pour enlever la phase du paramètre Λ , que nous supposons réel par la suite. Comme il n'y a que deux neutrinos droits, seulement deux neutrinos légers recevront une masse. Nous pouvons déjà calculer les coefficients :

$$c^{d=5} \equiv Y_N^T \frac{1}{M_N} Y_N = \begin{pmatrix} Y^T & \varepsilon Y'^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\Lambda} \\ \frac{1}{\Lambda} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ \varepsilon Y' \end{pmatrix} = \varepsilon \left(Y^T \frac{1}{\Lambda} Y' + Y'^T \frac{1}{\Lambda} Y \right) \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} c^{d=6} &\equiv Y_N^\dagger \frac{1}{M_N^2} Y_N = \begin{pmatrix} Y^T & \varepsilon Y'^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\Lambda^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Lambda^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ \varepsilon Y' \end{pmatrix} = Y^\dagger \frac{1}{\Lambda^2} Y + \varepsilon^2 Y'^\dagger \frac{1}{\Lambda^2} Y' \\ &\approx Y^\dagger \frac{1}{\Lambda^2} Y \end{aligned} \quad (3.8)$$

Ce modèle permet bien un grand coefficient $c^{d=6}$ tout en assurant de faibles masses de neutrinos. En effet, si L est conservé, $\varepsilon = 0$ et $c^{d=5} \propto m_\nu = 0$ tandis que $c^{d=6}$ reste grand via le terme $Y^\dagger \frac{1}{\Lambda^2} Y$. Nous allons suivre la méthode introduite à la section 2.1 pour rechercher les états propres et les valeurs propres de la matrice de masse. On doit pour

exemple [56]. Mais ceux-ci ne découplent pas les opérateurs $c^{d=5}$ et $c^{d=6}$ de sorte qu'ils ne génèrent pas de taux observables de processus changeant la saveur.

cela diagonaliser la matrice M_ν par étapes successives. Appliquons dans un premier temps (voir (2.7)) :

$$U_N = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\varepsilon m_D^\dagger}{\Lambda} & \frac{m_D^\dagger}{\Lambda} \\ -\frac{\varepsilon m_D'}{\Lambda} & 1 & 0 \\ -\frac{m_D}{\Lambda} & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M'_\nu = U_N^T M_\nu U_N = \begin{pmatrix} m_\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda + \frac{m_D m_D^\dagger}{\Lambda} \\ 0 & \Lambda + \frac{m_D m_D^\dagger}{\Lambda} & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon}{\Lambda}\right)$$

U_N est unitaire à l'ordre $\mathcal{O}(\frac{1}{\Lambda^2})$, et m_ν est la matrice de masse des neutrinos légers :

$$m_\nu = -\varepsilon \left(m_D^T \frac{1}{\Lambda} m_D' + m_D'^T \frac{1}{\Lambda} m_D \right) = -\frac{v^2}{2} \varepsilon \left(Y^T \frac{1}{\Lambda} Y' + Y'^T \frac{1}{\Lambda} Y \right) = -\frac{v^2}{2} c^{d=5} \quad (3.9)$$

On retrouve bien l'expression (3.7). Cependant, l'unitarité approximative de la matrice U_N induit des modifications dans les termes cinétiques. Il faut dès lors redéfinir les champs de manière à avoir des termes cinétiques correctement normalisés. Par (2.15), on a :

$$N^{1/2} = (U_N^\dagger U_N)^{1/2} \approx \begin{pmatrix} 1 + \frac{\varepsilon_N}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{\varepsilon'_N}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{\varepsilon''_N}{2} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

où :

$$\varepsilon_N = \frac{v^2}{2} \left(Y^\dagger \frac{1}{\Lambda^2} Y + \varepsilon^2 Y'^\dagger \frac{1}{\Lambda^2} Y' \right) = \frac{v^2}{2} c^{d=6} \quad (3.11)$$

$$\varepsilon'_N = \frac{v^2}{2} \varepsilon^2 \left(Y' \frac{1}{\Lambda^2} Y'^\dagger \right) \approx 0 \quad (3.12)$$

$$\varepsilon''_N = \frac{v^2}{2} \left(Y \frac{1}{\Lambda^2} Y^\dagger \right) \quad (3.13)$$

On retrouve bien le coefficient $c^{d=6} \propto \varepsilon_N$ obtenu en (3.8). La matrice de changement de base et la matrice de masse deviennent :

$$U_1 \equiv U_N N^{-1/2} \quad ; \quad M''_\nu = U_1^T M_\nu U_1 = \begin{pmatrix} m_\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda \\ 0 & \Lambda & 0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon}{\Lambda}\right)$$

Continuons la diagonalisation en appliquant :

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow M'''_\nu = U_2^T M''_\nu U_2 = \begin{pmatrix} m_\nu & 0 & 0 \\ 0 & -\Lambda & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda \end{pmatrix} + \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon}{\Lambda}\right)$$

puis :

$$U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On trouve finalement :

$$M_\nu^D = (U_1 U_2 U_3)^T M_\nu (U_1 U_2 U_3) = \begin{pmatrix} m_\nu & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda \end{pmatrix} + \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon}{\Lambda}\right) \quad (3.14)$$

Les masses des neutrinos lourds sont donc dégénérées :

$$M_{N_1} = M_{N_2} = \Lambda \equiv M_N \quad (3.15)$$

La matrice de changement de base s'exprime :

$$U = U_1 U_2 U_3 = \begin{pmatrix} (\mathbb{1}_{3 \times 3} - \frac{\varepsilon_N}{2}) & \frac{-iv}{2\Lambda}(Y^\dagger - \varepsilon Y'^\dagger) & \frac{v}{2\Lambda}(Y^\dagger + \varepsilon Y'^\dagger) \\ -\frac{v}{\sqrt{2}\Lambda}\varepsilon Y' & \frac{i}{\sqrt{2}}(1 - \frac{\varepsilon'_N}{2}) & \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \frac{\varepsilon'_N}{2}) \\ -\frac{v}{\sqrt{2}\Lambda}Y & \frac{-i}{\sqrt{2}}(1 - \frac{\varepsilon''_N}{2}) & \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \frac{\varepsilon''_N}{2}) \end{pmatrix} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\Lambda^3}\right) \quad (3.16)$$

Phénoménologie

Si on suppose la matrice de masse des leptons chargés diagonale, i.e. $B_{i\kappa} = \sum_{j=1}^3 V_{Lji}^{e*} U_{j\kappa} = U_{i\kappa}$ dans (2.26) et (2.27), on peut calculer les différents rapports de branchements introduits à la section 2.2 à l'aide de la matrice U (3.16). Comme les masses des deux neutrinos lourds sont en bonne approximation dégénérées, les facteurs de formes s'expriment :

$$\begin{aligned} F_\gamma^{ll'} &= \sum_{N_i} U_{lN_i}^* U_{l'N_i} F_\gamma(\lambda_{N_i}) \approx \sum_{N_i} U_{lN_i}^* U_{l'N_i} F_\gamma(\lambda_N) \approx \frac{v^2}{2} \left(Y_l \frac{1}{\Lambda^2} Y_{l'}^* \right) F_\gamma(\lambda_N) \\ &= [\varepsilon_N]_{ll'} F_\gamma(\lambda_N) \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} G_\gamma^{ll'} &= \sum_{N_i} U_{lN_i}^* U_{l'N_i} G_\gamma(\lambda_{N_i}) \approx \sum_{N_i} U_{lN_i}^* U_{l'N_i} G_\gamma(\lambda_N) \\ &\approx [\varepsilon_N]_{ll'} G_\gamma(\lambda_N) \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} F_Z^{ll'} &\approx \sum_{N_i, N_j} U_{lN_i}^* U_{l'N_j} \left[\delta_{N_i N_j} (F_Z(\lambda_{N_i}) + 2G_Z(0, \lambda_{N_i})) \right] \\ &\approx [\varepsilon_N]_{ll'} (F_Z(\lambda_N) + 2G_Z(0, \lambda_N)) \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} F_{Box}^{ll'l'l'} &\approx \sum_{N_i, N_j} 2 U_{lN_i}^* U_{l'N_i} \left[\delta_{N_i N_j} (F_{Box}(0, \lambda_{N_i}) - F_{Box}(0, 0)) \right] \\ &\approx [\varepsilon_N]_{ll'} 2 (F_{Box}(0, \lambda_{N_i}) - F_{Box}(0, 0)) \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned}
 F_{Box}^{ll'uu} &\approx \sum_{N_i, N_j} U_{lN_i}^* U_{l'N_i} \left[\delta_{N_i N_j} (F_{Box}(0, \lambda_{N_i}) - F_{Box}(0, 0)) \right] \\
 &\approx [\epsilon_N]_{l'l} (F_{Box}(0, \lambda_{N_i}) - F_{Box}(0, 0))
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$F_{Box}^{ll'dd} \approx F_{Box}^{ll'uu} \tag{3.22}$$

où $F_\gamma, G_\gamma, F_Z, G_Z$ et F_{Box} sont des fonctions de $\lambda_N = \frac{M_N^2}{M_W^2}$, voir annexe C. Les termes $[\epsilon_N]_{l'l}$ se factorisent alors dans les expressions des rapports de branchement :

$$Br(l \rightarrow l' \gamma) \approx N_1(m_l, \Gamma_l) [\epsilon_N]_{l'l} F_1(M_N^2) \tag{3.23}$$

$$Br(l \rightarrow l' l' l') \approx N_2(m_l, \Gamma_l) [\epsilon_N]_{l'l} F_2(M_N^2) \tag{3.24}$$

$$Br_{\mu e}(N, Z) \approx N_3(m_l, \Gamma_l) [\epsilon_N]_{e\mu} F_3(M_N^2) \tag{3.25}$$

où N_1, N_2, N_3 sont des facteurs qui dépendent du lepton l (voir section 2.2), et F_1, F_2, F_3 sont des fonctions de M_N^2 . On peut donc émettre des prédictions sur les rapports de branchement suivants :

$$\frac{Br(l \rightarrow l' \gamma)}{Br(l \rightarrow l' l' l')} \approx \frac{N_1}{N_2} \frac{F_1(M_N^2)}{F_2(M_N^2)} \tag{3.26}$$

$$\frac{Br(\mu \rightarrow e \gamma)}{Br_{\mu e}(N, Z)} \approx \frac{N_3}{N_1} \frac{F_3(M_N^2)}{F_1(M_N^2)} \tag{3.27}$$

$$\frac{Br(\mu \rightarrow e e e)}{Br_{\mu e}(N, Z)} \approx \frac{N_3}{N_2} \frac{F_3(M_N^2)}{F_2(M_N^2)} \tag{3.28}$$

qui sont indépendants des ϵ_N , et donc des couplages de Yukawa. Il est remarquable que ces rapports ne dépendent que du seul paramètre M_N . Cette unique dépendance n'a été possible que par le fait que les deux neutrinos lourds sont dégénérés en masse. En fait, on se convainc aisément que ces rapports sont indépendants du modèle considéré, à partir du moment où il prédit des neutrinos lourds de même masse - qu'il y en ait deux ou plus.

Les graphiques de différents rapports de branchement en fonction de M_N sont présentés Figure 3.2, et constituent une nouveauté. Nous avons utilisé $\Gamma_\mu \approx 2.996 \cdot 10^{-19}$ GeV et $\Gamma_\tau \approx 2.265 \cdot 10^{-12}$ GeV, calculés à partir des temps de vie donnés dans [4]. De plus, pour les processus $\mu Ti - e Ti$, $\mu Au - e Au$ et $\mu Pb - e Pb$, nous avons utilisé les mesures expérimentales fournies dans [40].

On remarque que les rapports de branchement des processus $l \rightarrow l' \gamma$ sont plus grands que ceux des processus $l \rightarrow l' l' l'$ pour approximativement $M_N \in [1 \text{ GeV}, 10^5 \text{ GeV}]$. C'est notamment dû au fait que le processus $l \rightarrow l' l' l'$ possède un vertex de plus. Par contre, le rapport de branchement $Br_{\mu e}(N, Z)$ est toujours plus grand que les rapports de branchement des processus $\mu \rightarrow e \gamma$ et $\mu \rightarrow e e e$, la courbe $Br(\mu^- \rightarrow e^- e^- e^+)/Br_{\mu e}(Ti)$ tendant vers 0.135195 lorsque $M_N \rightarrow \infty$. Bien que les diagrammes de Feynman soient très similaires, on peut comprendre cela par le fait que $\mu - e$ conversion dépend du nombre

de quarks dans le noyau. Ces rapports constituent de très bons tests pour le modèle, et permettent en plus de distinguer les différents modèles Seesaw, comme nous allons le montrer dans la section suivante.

Concrètement, la borne expérimentale actuelle sur $\mu - e$ conversion donne une borne supérieure sur $\mu \rightarrow e\gamma$, qui est en général bien en deçà de la borne expérimentale actuelle sur $\mu \rightarrow e\gamma$. L'observation dans un futur proche du processus $\mu \rightarrow e\gamma$ contredirait donc la non observation de $\mu - e$ conversion et mettrait à mal ce modèle². De même, l'absence d'observation du processus $\mu(Ti) \rightarrow e(Ti)$ impliquerait une borne supérieure sur $\mu \rightarrow e\gamma$, par exemple $Br(\mu \rightarrow e\gamma) \lesssim 10^{-18}$ si nous prenons la sensibilité attendue de l'expérience PRISM. Par ailleurs, l'observation de $Br(\mu \rightarrow e\gamma)$ et $Br_{\mu e}(Ti)$ avec un rapport tel que dans la Figure 3.2 nous donnerait accès à l'échelle de masse M_N .

Pour finir, signalons que dans [29], il a été montré que ce modèle MFV fournit aussi des prédictions sur les rapports de branchement $\frac{Br(\mu \rightarrow e\gamma)}{Br(\tau \rightarrow e\gamma)}$ et $\frac{Br(\mu \rightarrow e\gamma)}{Br(\tau \rightarrow \mu\gamma)}$ en fonction des paramètres θ_{13} , α et δ . Partant de la matrice de masse des neutrinos légers (3.9) et la diagonalisant afin de déterminer la forme générale de la matrice U_{PMNS} en terme des éléments de la matrice Y_N , ils ont pu directement exprimer les matrices Y et Y' à un facteur de normalisation globale près, qui se simplifie dans les rapports $\frac{Br(\mu \rightarrow e\gamma)}{Br(\tau \rightarrow e\gamma)}$ et $\frac{Br(\mu \rightarrow e\gamma)}{Br(\tau \rightarrow \mu\gamma)}$. Les graphiques obtenus dans le cas d'une hiérarchie normale de masse des neutrinos sont repris dans la Figure 3.1 ci-dessous.

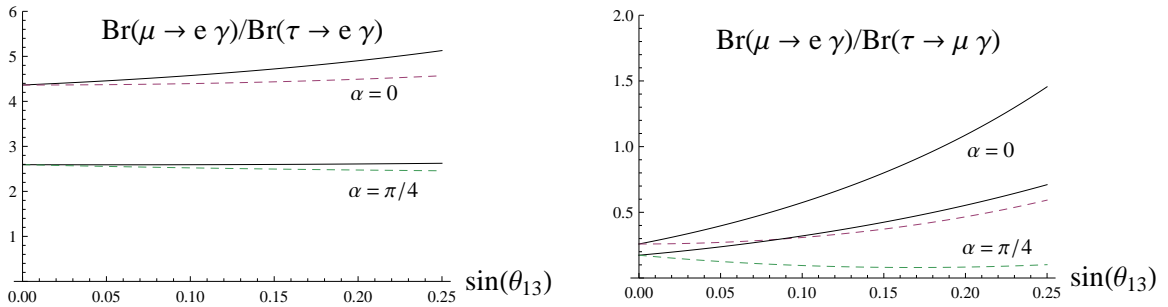


FIGURE 3.1 – Prédiction du modèle MFV sur les rapports de branchement $\frac{Br(\mu \rightarrow e\gamma)}{Br(\tau \rightarrow e\gamma)}$ et $\frac{Br(\mu \rightarrow e\gamma)}{Br(\tau \rightarrow \mu\gamma)}$ issus de l'article [29]. Les lignes continues et discontinues correspondent à $\delta = 0$ et $\delta = \pi/2$ respectivement.

2. Pour rappel, MEG devrait bientôt parvenir à des sensibilités de $\sim 10^{-13}$ sur le rapport de branchement $\mu \rightarrow e\gamma$.

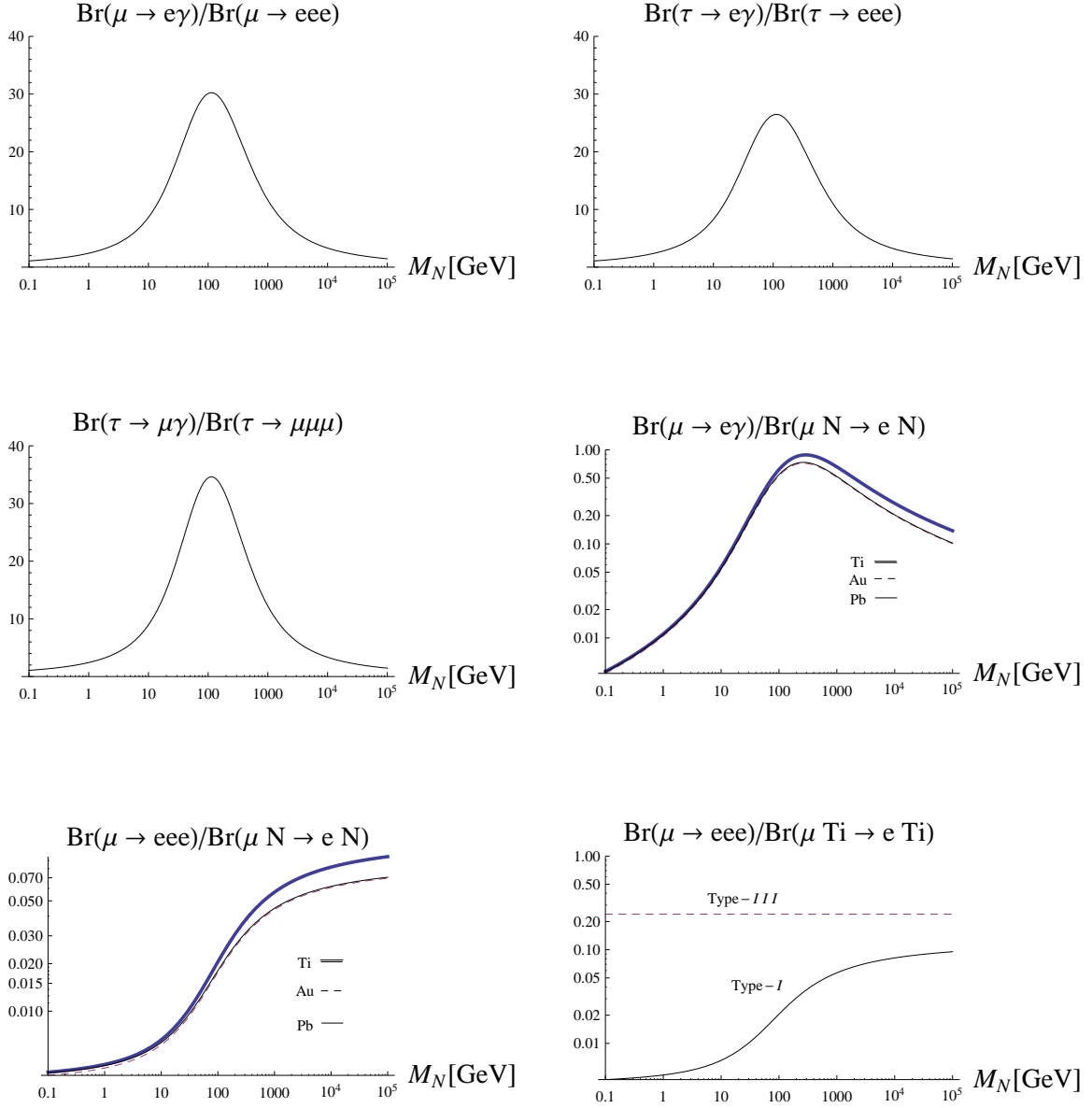


FIGURE 3.2 – Prédications sur les rapports de branchement de différents processus. Respectivement, $Br(l \rightarrow l' \gamma) = \frac{\Gamma(l \rightarrow l' \gamma)}{\Gamma_l}$, $Br(l \rightarrow l_1 l_2 l_3) = \frac{\Gamma(l \rightarrow l_1 l_2 l_3)}{\Gamma_l}$ et $Br_{\mu e}(N, Z) = \frac{\Gamma[\mu(N, Z) \rightarrow e(N, Z)]}{\Gamma[\mu(N, Z) \rightarrow \text{capture}]}$. Les pics dans les quatre premières figures sont dû à la croissance plus rapide du facteur de forme du rapport de branchement $Br(l \rightarrow l' \gamma)$ par rapport aux facteurs de forme des rapports de branchement $Br(l \rightarrow l_1 l_2 l_3)$ et $Br_{\mu e}(N, Z)$, jusqu'aux alentours de $M_N \approx 100$ GeV et $M_N \approx 700$ GeV respectivement. Au-delà, le rapport de branchement $Br(l \rightarrow l' \gamma)$ diminue sa croissance jusqu'à devenir constant pour $M_N \gtrsim 1$ TeV, alors que les rapports $Br(l \rightarrow l_1 l_2 l_3)$ et $Br_{\mu e}(N, Z)$ augmentent logarithmiquement.

Comparaisons avec les mécanismes Seesaw Type-II et Type-III

Il est intéressant de comparer ces rapports avec ceux prédits par les autres mécanismes Seesaw. Dans [59] ont été calculés les rapports de branchement (3.26-3.28) pour le modèle Seesaw Type-III. Pour $M_N \gg M_W$:

$$\frac{Br(\mu \rightarrow e\gamma)}{Br(\mu \rightarrow eee)} = \frac{Br(\tau \rightarrow e\gamma)}{Br(\tau \rightarrow eee)} = \frac{Br(\tau \rightarrow \mu\gamma)}{Br(\tau \rightarrow \mu\mu\mu)} = 1.3 \times 10^{-3} \quad (3.29)$$

$$\frac{Br(\mu \rightarrow e\gamma)}{Br_{\mu e}(N, Z)} = 3.1 \times 10^{-4} \quad (3.30)$$

$$\frac{Br(\mu \rightarrow eee)}{Br_{\mu e}(N, Z)} = 2.4 \times 10^{-1} \quad (3.31)$$

On remarque que contrairement à notre modèle, tous les rapports sont constants pour $M_N \gg M_W$. Cette différence provient d'une part du fait que les processus $l \rightarrow l'l'l'$ et $\mu - e$ conversion sont à l'ordre arbre dans le Seesaw Type-III, d'autre part que $\mu \rightarrow e\gamma$ n'y dépend pas de M_N de manière logarithmique, alors que dans le Seesaw Type-I, ils sont tous à l'ordre d'une boucle, et induisent une dépendance logarithmique en $\ln M_N$ dans les rapports de branchement. Pour ce qui est du modèle Seesaw Type-II, on ne sait tout simplement pas prédire ces rapports car les paramètres dont ils dépendent ne se simplifient pas. On a représenté les prédictions des mécanismes Seesaw Type-I et Type-III sur le rapport $Br(\mu \rightarrow eee)/Br_{\mu e}(Ti)$ dans le dernier graphique de la Figure 3.2. Les deux modèles sont donc distinguables. Pour les autres rapports, le Seesaw Type-III donne des valeurs inférieures au Seesaw Type-I pour toute valeur de M_N .

Reconstruction

Nous allons utiliser les résultats trouvés en (2.4) afin de déterminer s'il est possible ou non de reconstruire le Lagrangien de haute énergie. Supposons donc idéalement qu'on ait eu accès par le biais des expériences à l'ensemble des éléments de matrice des coefficients $c^{d=5}$ et $c^{d=6}$, donnés dans notre modèle par :

$$m_\nu = -\frac{v^2}{2} c^{d=5} = -\frac{v^2}{2} \varepsilon \left(Y'^T \frac{1}{\Lambda} Y + Y^T \frac{1}{\Lambda} Y' \right) \quad (3.32)$$

$$\lambda = \frac{v^2}{2} c^{d=6} = \frac{v^2}{2} \left(Y^\dagger \frac{1}{\Lambda^2} Y + \varepsilon^2 Y^\dagger \frac{1}{\Lambda^2} Y' \right) = \chi^\dagger \chi \quad (3.33)$$

Si on sait reconstruire

$$\chi \equiv \begin{pmatrix} |a| & b & c \\ 0 & |e| & f \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

on peut ensuite, à priori, tout reconstruire en suivant la méthode vue dans la section 2.4. Mais en pratique, cette construction n'est pas réalisable. En effet, on ne sait en réalité pas mesurer avec une précision infinie, et comme $\varepsilon \ll 1$, la matrice $c^{d=6}$ est pratiquement de rang 1 puisque Y est une matrice colonne 1×3 et :

$$\lambda \approx \frac{v^2}{2} Y^\dagger \frac{1}{\Lambda^2} Y \quad (3.35)$$

Par conséquent, χ est pratiquement de rang 1 :

$$\chi \approx \begin{pmatrix} |a| & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

et est non inversible, i.e. il n'existe pas de matrice χ_R^{-1} telle que $\chi \chi_R^{-1} = \mathbb{1}_{2 \times 2}$. La deuxième condition nécessaire à la reconstruction n'est donc pas remplie, et on ne sait en pratique pas retrouver Y_N et M_N . Cependant, on sait déterminer les paramètres a, b, c à l'aide des relations (2.83), et à partir de (3.35) on trouve :

$$\frac{Y_1}{M} = |a| = \sqrt{|\lambda_{11}|} \quad ; \quad (3.37)$$

$$\frac{|Y_2|}{M} = |b| = \sqrt{|\lambda_{22}|} \quad ; \quad \theta_{Y_2} = \text{Arg}(\lambda_{12}) \quad (3.38)$$

$$\frac{|Y_3|}{M} = |c| = \sqrt{|\lambda_{33}|} \quad ; \quad \theta_{Y_3} = \text{Arg}(\lambda_{13}) \quad (3.39)$$

À partir de :

$$m_\nu = (Y'^T Z + Z^T Y') \quad \text{où} \quad Z \equiv -\frac{v^2}{2} \frac{Y}{\Lambda} \quad (3.40)$$

On sait aussi déterminer :

$$|Y'_1| = \frac{(m_\nu)_{11}}{2|Z_1|} = \frac{1}{v^2} \frac{[m_\nu]_{11}}{\sqrt{|\lambda_{11}|}} \quad \theta_{Y'_1} = \pi + \text{Arg}([m_\nu]_{11}) \quad (3.41)$$

$$|Y'_2| = \frac{(m_\nu)_{22}}{2|Z_2|} = \frac{1}{v^2} \frac{[m_\nu]_{22}}{\sqrt{|\lambda_{22}|}} \quad \theta_{Y'_2} = \pi + \text{Arg}([m_\nu]_{22}) - \text{Arg}(\lambda_{12}) \quad (3.42)$$

$$|Y'_3| = \frac{(m_\nu)_{33}}{2|Z_3|} = \frac{1}{v^2} \frac{[m_\nu]_{33}}{\sqrt{|\lambda_{33}|}} \quad \theta_{Y'_3} = \pi + \text{Arg}([m_\nu]_{33}) - \text{Arg}(\lambda_{13}) \quad (3.43)$$

On sait en fait reconstruire Y' et Y/Λ entièrement. Seul Λ n'est pas déterminé. On peut le voir directement à partir des expressions (3.32) et (3.35) qui restent inchangées sous une redéfinition $Y \rightarrow \alpha Y$, $\Lambda \rightarrow \alpha \Lambda$. Notons que l'impossibilité de reconstruire Λ est due au départ à l'approximation (3.35), justifiée par le fait que $\varepsilon \ll 1$. Donc, la connaissance des coefficients $c^{d=5}$ et $c^{d=6}$ avec une précision finie ne permet pas de reconstruire tout le Lagrangien de départ comme attendu par nos critères généraux. Cependant, les rapports

de branchement ne dépendent pas uniquement de ces coefficients, ils sont aussi fonctions du logarithme de M_N . L'on peut donc déterminer $\Lambda = M_N$ à partir des résultats de la Figure 3.2 comme expliqué ci-dessus³. On voit donc qu'il est possible de tout reconstruire, à condition de connaître les coefficients $c^{d=5}$, $c^{d=6}$ et au moins un rapport entre deux processus différents.

Par ailleurs, la reconstruction de Y et Y' à partir du coefficient $c^{d=5}$ a été effectuée dans [55] en terme des masses des neutrinos légers et des paramètres de mélange. Par exemple dans le cas d'une hiérarchie normale et à l'ordre $\mathcal{O}(\sqrt{R}, s_{13})$:

$$Y^T \approx y \begin{pmatrix} e^{i\delta} s_{13} + e^{-i\alpha} s_{12} R^{1/4} \\ s_{23}(1 - \frac{\sqrt{R}}{2}) + e^{-i\alpha} R^{1/4} c_{12} c_{23} \\ c_{23}(1 - \frac{\sqrt{R}}{2}) - e^{-i\alpha} R^{1/4} c_{12} s_{23} \end{pmatrix} \quad Y'^T \approx y' \begin{pmatrix} e^{i\delta} s_{13} - e^{-i\alpha} s_{12} R^{1/4} \\ s_{23}(1 - \frac{\sqrt{R}}{2}) - e^{-i\alpha} R^{1/4} c_{12} c_{23} \\ c_{23}(1 - \frac{\sqrt{R}}{2}) + e^{-i\alpha} R^{1/4} c_{12} s_{23} \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

où y et y' sont les coefficients de normalisation, i.e. $y = \sqrt{Y Y^\dagger}$ et $y' = \sqrt{Y' Y'^\dagger}$. On retrouve bien le fait que Y n'est déterminable de cette manière qu'à un facteur près. Par contre, si on ajoute notre résultat principal de cette section, i.e. le fait que M_N est déterminable, l'on peut donc avoir accès à y aussi. À notre connaissance, il n'existe pas dans la littérature de modèle Seesaw dont le Lagrangien complet puisse être reconstruit complètement comme c'est le cas dans ce modèle-ci.

3.2.3 Analyse du modèle Minimal Flavor Violation - cas général

Coefficients $c^{d=5}$, $c^{d=6}$ et matrice U

Soit le modèle suivant :

$$M_\nu = \begin{pmatrix} 0 & Y^T \frac{v}{\sqrt{2}} & \varepsilon Y'^T \frac{v}{\sqrt{2}} \\ Y \frac{v}{\sqrt{2}} & \mu' & \Lambda \\ \varepsilon Y' \frac{v}{\sqrt{2}} & \Lambda & \mu \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad Y^T = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y'^T = \begin{pmatrix} Y'_1 \\ Y'_2 \\ Y'_3 \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

Une redéfinition des deux neutrinos droits permet d'enlever deux phases dans la matrice M_N . On supposera donc dorénavant Λ et μ réels. Pour simplifier, nous prendrons aussi μ' réel. On a les coefficients suivants :

$$\begin{aligned} c^{d=5} &= \frac{1}{\mu' \mu - \Lambda^2} \left[Y^T \mu Y - \varepsilon (Y^T \Lambda Y' + Y'^T \Lambda Y) + \varepsilon^2 Y'^T \mu' Y' \right] \\ &= \varepsilon \left(Y^T \frac{1}{\Lambda} Y' + Y'^T \frac{1}{\Lambda} Y \right) + \mathcal{O} \left(\frac{\mu}{\Lambda^2}, \frac{\varepsilon^2 \mu'}{\Lambda^2} \right) \end{aligned} \quad (3.46)$$

3. Si du moins on suppose que $M_N > 100$ GeV. Sinon un rapport détermine deux valeurs possibles pour M_N .

$$\begin{aligned}
 c^{d=6} &= \frac{1}{(\mu'\mu - \Lambda^2)^2} \left[Y^\dagger (\Lambda^2 + \mu^2) Y + \varepsilon \Lambda (\mu + \mu') (Y^\dagger Y' + Y'^\dagger Y) + \varepsilon^2 Y'^\dagger (\Lambda^2 + |\mu'|^2) Y' \right] \\
 &= Y^\dagger \frac{1}{\Lambda^2} Y + \mathcal{O} \left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2}, \frac{\varepsilon^2}{\Lambda^2} \right)
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

Si on suppose $\frac{\mu}{\Lambda^2} \ll \frac{\varepsilon}{\Lambda}$, on retrouve en bonne approximation les mêmes coefficients que dans le cas $\mu = \mu' = 0$. Cependant, les valeurs propres de la matrice de masses des neutrinos lourds s'expriment maintenant :

$$M_{N_1} = 2SC \Lambda - C^2 \mu' - S^2 \mu \tag{3.48}$$

$$M_{N_2} = 2SC \Lambda + S^2 \mu' + C^2 \mu \tag{3.49}$$

avec $C = \cos \varphi$, $S = \sin \varphi$,

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctan \left[\frac{-2\Lambda}{\mu' - \mu} \right] \tag{3.50}$$

La matrice de changement de base devient :

$$U = \begin{pmatrix} (\mathbb{1}_{3 \times 3} - \frac{\varepsilon_N}{2}) & \frac{-iv}{\sqrt{2}\Lambda} (S Y^\dagger - C \varepsilon Y'^\dagger) & \frac{v}{\sqrt{2}\Lambda} (C Y^\dagger + S \varepsilon Y'^\dagger) \\ -\frac{v}{\sqrt{2}\Lambda} \varepsilon Y' & iC (1 - \frac{\varepsilon'_N}{2}) & S (1 - \frac{\varepsilon'_N}{2}) \\ -\frac{v}{\sqrt{2}\Lambda} Y & -iS (1 - \frac{\varepsilon''_N}{2}) & C (1 - \frac{\varepsilon''_N}{2}) \end{pmatrix} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\Lambda^3} \right) \tag{3.51}$$

où :

$$\varepsilon_N = \frac{v^2}{2} \left(Y^\dagger \frac{1}{\Lambda^2} Y \right) + \mathcal{O} \left(\frac{\varepsilon^2}{\Lambda^2} \right) \tag{3.52}$$

$$\varepsilon'_N = \mathcal{O} \left(\frac{\varepsilon^2}{\Lambda^2} \right) \quad ; \quad \varepsilon''_N = \frac{v^2}{2} \left(Y \frac{1}{\Lambda^2} Y^\dagger \right) \approx \varepsilon_N \tag{3.53}$$

Phénoménologie

Comme on suppose $\mu, \mu' \ll \Lambda$ on a les approximations suivantes⁴ :

$$M_{N_1} \approx \Lambda - \frac{1}{2}(\mu' + \mu) + \mathcal{O} \left(\frac{\mu' - \mu}{\Lambda} \right) \tag{3.54}$$

$$M_{N_2} \approx \Lambda + \frac{1}{2}(\mu' + \mu) + \mathcal{O} \left(\frac{\mu' - \mu}{\Lambda} \right) \tag{3.55}$$

Les fonctions des facteurs de formes ne se factorisent plus, et on ne sait plus faire de prédictions sur les rapports de branchement. Cependant, dans les cas où $\mu = 0$ ou $\mu' = 0$, on arrive tout de même à des résultats. En effet, si on prend par exemple $\mu = 0$, on voit

4. Voir annexes D pour plus de détails.

à partir de (3.54) et (3.55) que :

$$\Lambda = \frac{M_{N_1} + M_{N_2}}{2} \quad (3.56)$$

$$\mu' = M_{N_2} - M_{N_1} \quad (3.57)$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctan \left[\frac{M_{N_1} + M_{N_2}}{M_{N_1} - M_{N_2}} \right] \quad (3.58)$$

et les facteurs de formes s'expriment, avec $B_{i\kappa} = U_{i\kappa}$:

$$\begin{aligned} F_\gamma^{ll'} &\approx [\epsilon_N]_{l'l} \left\{ S^2 F_\gamma(\lambda_{N_1}) + C^2 F_\gamma(\lambda_{N_2}) \right\} \\ G_\gamma^{ll'} &\approx [\epsilon_N]_{l'l} \left\{ S^2 G_\gamma(\lambda_{N_1}) + C^2 G_\gamma(\lambda_{N_2}) \right\} \\ F_Z^{ll'} &\approx [\epsilon_N]_{l'l} \left\{ S^2 [F_Z(\lambda_{N_1}) + 2G_Z(0, \lambda_{N_1})] + C^2 [F_Z(\lambda_{N_2}) + 2G_Z(0, \lambda_{N_2})] \right\} \\ F_{Box}^{ll'l'l} &\approx [\epsilon_N]_{l'l} 2 \left\{ S^2 [F_{Box}(0, \lambda_{N_1}) - F_{Box}(0, 0)] + C^2 [F_{Box}(0, \lambda_{N_2}) - F_{Box}(0, 0)] \right\} \\ F_{Box}^{ll'uu} &\approx [\epsilon_N]_{l'l} \left\{ S^2 [F_{Box}(0, \lambda_{N_1}) - F_{Box}(0, 0)] + C^2 [F_{Box}(0, \lambda_{N_2}) - F_{Box}(0, 0)] \right\} \\ F_{Box}^{ll'dd} &\approx F_{Box}^{ll'uu} \end{aligned}$$

Les facteurs $[\epsilon_N]_{l'l}$ se simplifient alors dans les expressions des rapports de branchement (3.28), qui ne sont fonctions plus que des paramètres M_{N_1} et M_{N_2} . Les graphiques des différents facteurs de formes sont présentés à la page suivante, Figure 3.3. Notons qu'on obtient les mêmes résultats si on prend $\mu' = 0$.

Reconstruction

On retrouve le même cas de figure que le modèle MFV où $\mu = \mu' = 0$, i.e. les équations (3.32) et (3.33), avec en plus l'impossibilité de reconstruire les paramètres μ et μ' uniquement à partir des coefficients $c^{d=5}$ et $c^{d=6}$. Cependant, dans le cas où un de ces deux paramètres est nul, il est possible de retrouver les masses M_{N_1} et M_{N_2} à partir des rapports de branchement. En effet, les mesures de deux rapports parmi ceux représentés à la Figure 3.3 détermineraient deux courbes, dont l'intersection donnerait les valeurs de M_{N_1} et M_{N_2} . À partir de celles-ci, il est alors possible de déterminer Λ et μ (μ') en utilisant les relations (3.56-3.58).

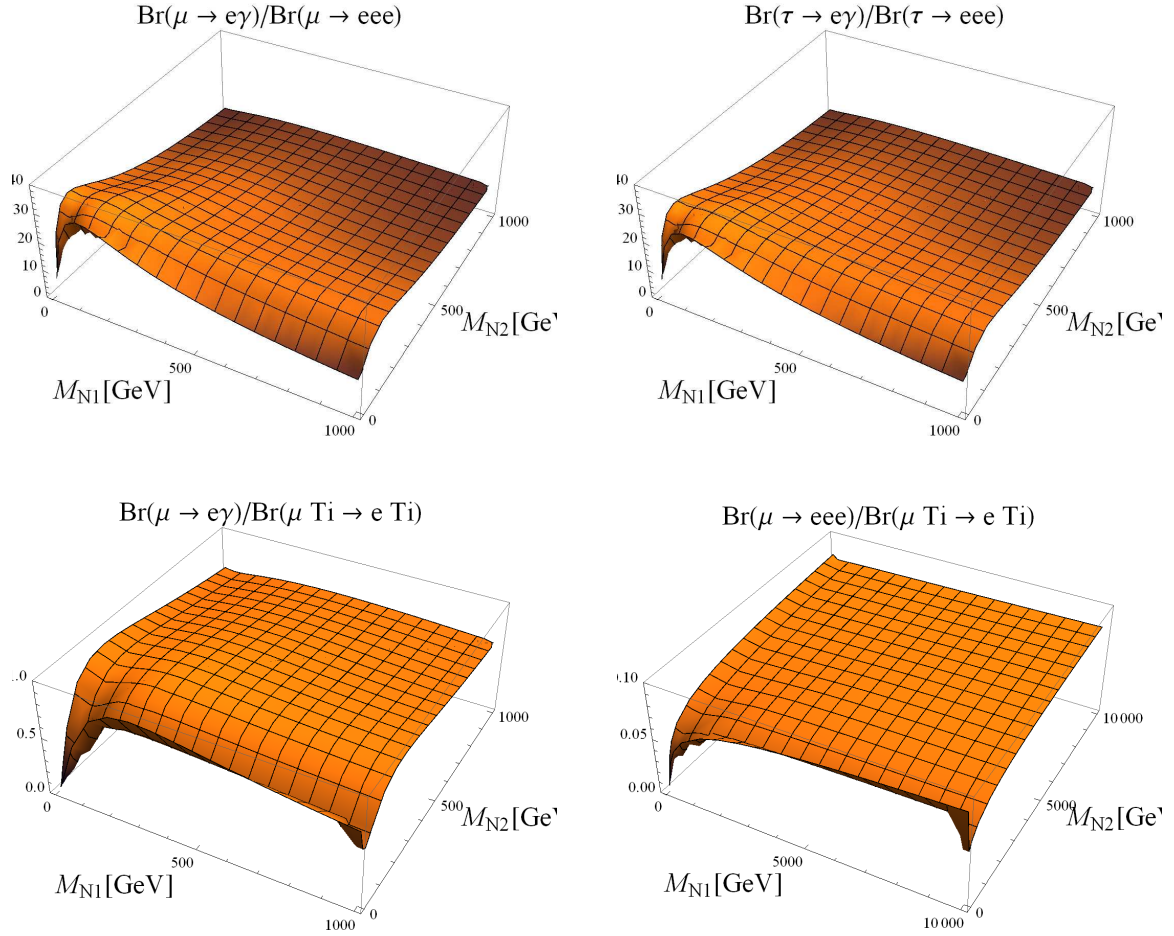


FIGURE 3.3 – Prédictions du modèle MFV, cas général, sur différents rapports de branchement.

3.2.4 Conclusion sur le modèle Minimal Flavor Violation

Le modèle Minimal Flavor Violation génère un découplage entre les coefficients $c^{d=5}$ et $c^{d=6}$, entraînant de faibles masses de neutrinos sans pour autant supprimer fortement les rapports de branchements des processus violant la saveur leptonique. Il est basé sur une symétrie qui est la conservation approximative du nombre leptonique. De plus, il aboutit à des prédictions remarquables dans les cas $\mu = \mu' = 0$ (voir Figures 3.2) et $\mu = 0$ (ou $\mu' = 0$) (voir Figures 3.3), fournissant un excellent test pour le modèle. On a vu de plus qu'il est possible de reconstruire tous les paramètres du Lagrangien, sauf dans le cas $\mu \neq 0 \neq \mu'$. On peut cependant aller plus loin si on impose à ce même modèle une structure particulière des couplages de Yukawa, possibilité que nous allons considérer maintenant.

3.2.5 Most Minimal Flavor Violation (MMFV)

Description

Nous reprenons dans cette section le même modèle MFV, mais dans lequel on impose en plus une structure particulière pour la matrice de Yukawa Y_N , et donc pour les matrices colonnes Y et Y' . En effet, on peut restreindre le nombre de paramètres sans pour autant être en conflit avec les données expérimentales actuelles, ce qui mène au modèle MMFV, Most Minimal Flavor Violation. L'étude de ce modèle est particulièrement intéressante, car elle nous montre quelle est la complexité minimum dont on a besoin dans un modèle Seesaw pour que premièrement il mène à des processus observables changeant la saveur, et que deuxièmement il soit en accord avec les contraintes actuelles sur les masses et les mélanges de neutrinos. Soit le modèle MFV général (3.4), dans lequel on impose :

$$Y = y \begin{pmatrix} 0 & s & c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y' = y' \begin{pmatrix} \alpha e^{i\phi} & \beta & \gamma \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

où $c = \cos \theta$ et $s = \sin \theta$, α, β et γ sont les paramètres réels tels que $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, et y et y' sont des coefficients réels de normalisation. Nous avons donc 5 modules indépendants $(y, y', \theta, \alpha, \beta)$ et 1 phase (ϕ) dans la matrice $Y_N^T = (Y^T \quad \varepsilon Y'^T)$, ainsi que 3 modules et 3 phases (Λ, μ, μ') dans la matrice M_N du cas MFV général⁵. Une redéfinition des neutrinos droits permet d'enlever 2 phases dans M_N , dans laquelle nous supposons plus que le paramètre μ' complexe⁶. Les coefficients s'expriment alors :

$$c^{d=5} \approx \varepsilon \left(Y^T \frac{1}{\Lambda} Y' + Y'^T \frac{1}{\Lambda} Y \right) = \frac{y \varepsilon y'}{\Lambda} \begin{pmatrix} 0 & s\alpha e^{i\phi} & c\alpha e^{i\phi} \\ s\alpha e^{i\phi} & 2s\beta & s\gamma + c\beta \\ c\alpha e^{i\phi} & s\gamma + c\beta & 2c\gamma \end{pmatrix} \quad (3.60)$$

$$c^{d=6} \approx Y^\dagger \frac{1}{\Lambda^2} Y = \frac{y^2}{\Lambda^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & s^2 & sc \\ 0 & sc & c^2 \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

On peut maintenant diagonaliser la matrice de masse des neutrinos légers en suivant la méthode proposée dans [55]. On trouve, pour les masses des neutrinos légers dans le cas d'une hiérarchie normale :

$$|m_1| = 0 \quad ; \quad |m_2| = \frac{v^2 y \varepsilon y'}{2\Lambda} (1 - (s\beta + c\gamma)) \quad ; \quad |m_3| = \frac{v^2 y \varepsilon y'}{2\Lambda} (1 + (s\beta + c\gamma)) \quad (3.62)$$

5. À noter qu'il n'est pas possible, dans le modèle MFV, de prendre une entrée négligeable pour Y autre que celle de l'équation 3.59, sauf bien sûr en échangeant les structures de Y et Y' . Ce modèle est donc unique.

6. Dans le cas où $\mu = \mu' = 0$, il est possible de redéfinir les neutrinos droits de manière à enlever la phase ϕ .

La matrice de diagonalisation s'exprime :

$$U_{PMNS} = \begin{pmatrix} \frac{s\gamma - c\beta}{N_1} & -\frac{\alpha e^{-i\phi}}{N_2} & \frac{\alpha e^{-i\phi}}{N_3} \\ \frac{c\alpha e^{i\phi}}{N_1} & \frac{s - \beta}{N_2} & \frac{s + \beta}{N_3} \\ -\frac{s\alpha e^{i\phi}}{N_1} & \frac{c - \gamma}{N_2} & \frac{c + \gamma}{N_3} \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{s\gamma - c\beta}{N_1} & \frac{\alpha}{N_2} & \frac{\alpha e^{-i\phi}}{N_3} \\ \frac{c\alpha e^{i\phi}}{N_1} & \frac{(\beta - s)e^{i\phi}}{N_2} & \frac{s + \beta}{N_3} \\ -\frac{s\alpha e^{i\phi}}{N_1} & \frac{(\gamma - c)e^{i\phi}}{N_2} & \frac{c + \gamma}{N_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i(\pi + \phi)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

$$= \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} U_{ph}^{Maj} \quad (3.65)$$

où :

$$N_1 = \sqrt{1 - (s\beta + c\gamma)^2} \quad ; \quad N_2 = \sqrt{2(1 - (s\beta + c\gamma))} \quad ; \quad N_3 = \sqrt{2(1 + (s\beta + c\gamma))} \quad (3.66)$$

On voit que les effets de la violation de CP sont compris dans $\phi = \delta$. Le point intéressant est qu'on a maintenant, à partir de (3.63) :

$$\begin{aligned} & [U_{PMNS}]_{12} N_2 + [U_{PMNS}]_{13} N_3 = 0 \\ \Rightarrow & s_{12}c_{13}e^{i\alpha} N_2 + s_{13}e^{-i\delta} N_3 = 0 \\ \Leftrightarrow & \tan \theta_{13} = \sqrt{\frac{1 - ss'}{1 + ss'}} s_{12} e^{i(\alpha + \delta + \pi)} \\ \Leftrightarrow & \tan \theta_{13} = \left(\frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{31}^2} \right)^{1/4} s_{12} e^{i(\alpha + \delta + \pi)} \end{aligned} \quad (3.67)$$

En définissant $R = \frac{\Delta m_{21}^2}{\Delta m_{31}^2}$, on obtient donc deux relations entre les observables :

$$\begin{cases} \tan \theta_{13} = R^{1/4} \sin \theta_{12} \\ \alpha = -(\delta + \pi) \end{cases} \quad (3.68)$$

Les données expérimentales actuelles fournissent :

$$\sin^2(2\theta_{13}) < 0.21 \quad (3 \sigma) \quad \text{pour } \Delta m_{31}^2 = 2.4 \times 10^{-3} \text{ eV}^2 \quad [14] \quad (3.69)$$

$$\theta_{12} = 34.4 \pm 1.0^\circ \quad (90\% \text{ C.L.}) \quad [15] \quad (3.70)$$

$$\theta_{23} = 42.8_{-2.9}^{+4.7} \text{ }^\circ \quad (90\% \text{ C.L.}) \quad [15] \quad (3.71)$$

$$\Delta m_{21}^2 = 7.59 \pm 0.20 \text{ } 10^{-5} \text{ eV}^2 \quad (90\% \text{ C.L.}) \quad [15] \quad (3.72)$$

$$\Delta m_{31}^2 = 2.46 \pm 0.12 \text{ } 10^{-3} \text{ eV}^2 \quad (90\% \text{ C.L.}) \quad [15] \quad (3.73)$$

où nous avons pris la nouvelle borne pour θ_{13} . Ces valeurs permettent de tester directement la relation (3.68) qui, à partir de (3.70), (3.72) et (3.73) donne $\sin^2(2\theta_{13}) = 0.20_{-0.03}^{+0.02}$. On remarque que cette relation est donc permise à 3σ . Elle n'est donc pas expérimentalement plausible, mais elle est certainement permise vu en particulier les fluctuations qui existent sur la borne expérimentale de θ_{13} en fonction des données que l'on considère pour l'ajustement, voir [14]. Cette relation est en fait précisément d'autant plus intéressante qu'elle prédit une valeur de l'ordre de la borne supérieure actuelle. Elle pourra donc être testée dans un futur proche par les nouvelles expériences d'oscillation des neutrinos auprès des réacteurs, en particulier par Double-Chooz et Daya Bay.

Continuons l'analyse du modèle. À partir de (3.63) et (3.65), il est possible de relier θ et θ' aux données observationnelles :

$$s\beta + c\gamma = \frac{1 - \sqrt{R}}{1 + \sqrt{R}} = 0.71 \Rightarrow N_1 \approx 0.70 ; N_2 \approx 0.76 ; N_3 \approx 1.85 \quad (3.74)$$

$$\alpha \approx 0.43 \quad ; \quad \beta \approx 0.346 \quad ; \quad \gamma \approx 0.834 \quad (3.75)$$

$$\theta \approx 60.9^\circ \quad (3.76)$$

À partir de la matrice de masse des neutrinos, nous avons donc réussi à reconstruire la structure de Yukawa, mais pas les normalisations y et y' ⁷. On voit, à travers (3.61), que l'élément de matrice de transition ne dépend maintenant plus que de y^2 et Λ^2 et est différent de zéro uniquement pour des processus comme $\tau \rightarrow \mu\gamma$ et vaut :

$$[\epsilon_N]_{\mu\tau} = sc \frac{y^2}{\Lambda^2} \approx 0.42 \frac{y^2}{\Lambda^2} \quad (3.77)$$

Phénoménologie

D'après (3.61), les rapports de branchement de processus violant la saveur leptonique impliquant un électron sont nuls, puisque $Y_e = 0$. Un rapport de branchement non nul est $Br(\tau \rightarrow \mu\gamma)/Br(\tau \rightarrow \mu\mu\mu)$ et donne des graphiques identiques aux précédents, voir Figure 3.2 (pour $\mu = \mu' = 0$) et Figure 3.3 (pour $\mu \neq \mu' \neq 0$). Cependant, il est possible d'exprimer les rapports de branchement $Br(\tau \rightarrow \mu\gamma)$ et $Br(\tau \rightarrow \mu\mu\mu)$ en fonction de $M_N = \Lambda$ et y . En effet, on obtient pour par exemple $Br(\tau \rightarrow \mu\gamma)$:

$$Br(\tau \rightarrow \mu\gamma) = \frac{\alpha_W^3 s_W^2}{256\pi^2} \frac{m_\tau^4}{M_W^4} \frac{m_\tau}{\Gamma_\tau} \frac{y^4 (sc)^2}{(M_{N_1} + M_{N_2})^4} \frac{v^2}{32} \left(S^2 G_\gamma(\lambda_{N_1}) + C^2 G_\gamma(\lambda_{N_2}) \right)^2 \quad (3.78)$$

avec $sc \approx 0.42$, $C = \cos\phi$ où ϕ est donné par (3.50). On a aussi utilisé la relation (3.56), i.e. $\Lambda = (M_{N_1} + M_{N_2})/2$. On a représenté à la Figure 3.4 ci-dessous les différents

7. On retrouve logiquement le même cas de figure que dans l'article [55], dans lequel la structure des Yukawa a été reconstruite à partir de la matrice de masse des neutrinos légers, voir (3.44).

rappports de branchement non nuls, dans le cas où $\mu = \mu' = 0$ ($\varphi = 45^\circ$). Il n'était pas possible de tracer ces graphiques auparavant puisque $[\epsilon_N]_{\mu\tau}$ dépendait alors de $Y_\mu^* Y_\tau$, qui contient deux paramètres réels et deux phases. Une mesure des rapport de branchement $Br(\tau \rightarrow \mu\gamma)$ et $Br(\tau \rightarrow \mu\mu\mu)$ permettrait donc la détermination des deux paramètres M_N et y séparément, rendant alors possible la reconstruction complète des paramètres du Lagrangien haute énergie à partir des coefficients $c^{d=5}$ et $c^{d=6}$. On n'a pas représenté les graphiques du cas $\mu \neq 0$ ou $\mu' \neq 0$, car ils dépendent encore de trois paramètres : M_{N_1} , M_{N_2} et y .

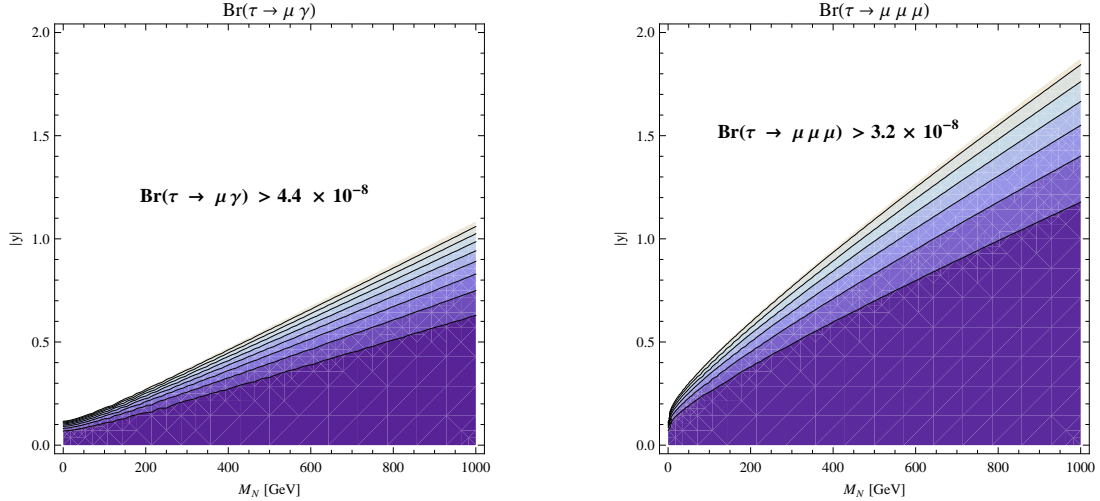


FIGURE 3.4 – Prédiction sur les rapports de branchement $Br(\tau \rightarrow \mu\gamma)$ et $Br(\tau \rightarrow \mu\mu\mu)$ en fonction de M_N et y . Les zones exclues par les limites expérimentales actuelles sur les rapports de branchement sont représentées par les zones claires.

Remarque

On voit clairement à partir de (3.60) que si on considère plutôt une structure avec le zéro dans la matrice Y' :

$$Y = y \begin{pmatrix} \alpha e^{i\phi} & \beta & \gamma \end{pmatrix} \quad ; \quad Y' = y' \begin{pmatrix} 0 & s & c \end{pmatrix} \quad (3.79)$$

on obtient la même prédiction sur l'angle θ_{13} : $\tan \theta_{13} = R^{1/4} \sin \theta_{12}$, i.e. $\theta_{13} \approx 13.3^\circ$. Il en résulte que cette prédiction est valable pour une structure avec un zéro en Y_{N11} ou Y_{N21} . Cependant, dans ce dernier cas, comme $Y_e \neq 0$, les processus violant la saveur impliquant un électron ne sont pas nuls, et il est possible de tracer les rapports $Br(\mu \rightarrow e\gamma)$, $Br(\mu \rightarrow eee)$ et $Br_{\mu e}(N, Z)$ en fonction de y et M_N , puisqu'ils dépendent alors du carré de l'élément de matrice :

$$[\epsilon_N]_{e\mu} = \alpha\beta \frac{y^2}{\Lambda} \approx 0.15 \frac{y^2}{\Lambda} \quad (3.80)$$

Comme les graphiques ressemblent fortement à ceux de la Figure 3.4, nous ne les montrons pas explicitement.

3.2.6 Autres modèles

Il est possible d'envisager d'autres modèles avec la même structure très minimale (3.59) pour $Y_N^T = (Y^T \ \varepsilon Y'^T)$. Par d'autres modèles on entend ici des modèles qui gardent la structure minimale (3.59) avec une autre forme pour la matrice M_N . Un modèle très minimal a par exemple été analysé dans [57]. Cependant, ces modèles n'aboutissent généralement pas à un découplage des coefficients $c^{d=5}$ et $c^{d=6}$, et ne génèrent pas de prédictions sur les rapports de branchement. On a regroupé dans la Table 3.1 ci-dessous les principales caractéristiques de modèles avec la structure de matrice de masse :

$$M_\nu = \begin{pmatrix} 0 & Y_N^T \\ Y_N & M_N \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad Y_N = (Y^T \ \varepsilon Y'^T) \quad (3.81)$$

avec la matrice M_N composée respectivement de deux entrées diagonales dominantes, une entrée diagonale dominante en M_{N22} et une entrée diagonale dominante en M_{N11} . À la dernière colonne, nous avons envisagé la structure particulière (3.59) pour la matrice Y_N .

M_N	$c^{d=5}$	Relation
$\begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Omega \end{pmatrix}$	$c^{d=5} = Y^T \frac{1}{\Lambda} Y + \varepsilon^2 Y'^T \frac{1}{\Omega} Y'$	$\theta_{13} \approx \frac{\sqrt{R}}{2} \sin 2\theta_{12} \tan \theta_{23}$ (8)
$\begin{pmatrix} \Lambda & \mu \\ \mu & \Omega \end{pmatrix}$	$c^{d=5} \approx Y^T \frac{1}{\Lambda} Y - \varepsilon \left(Y^T \frac{\mu}{\Lambda\Omega} Y' + Y'^T \frac{\mu}{\Lambda\Omega} Y \right)$	$\tan \theta_{13} \approx R^{1/4} \sin \theta_{12}$
$\begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \mu & \Lambda \end{pmatrix}$	$c^{d=5} = Y^T \left(\frac{-\Lambda}{\mu^2} \right) Y + \varepsilon \left(Y^T \frac{1}{\mu} Y' + Y'^T \frac{1}{\mu} Y \right)$	$\tan \theta_{13} = R^{1/4} \sin \theta_{12}$
$\begin{pmatrix} \mu' & \mu \\ \mu & \Lambda \end{pmatrix}$	$c^{d=5} \approx Y^T \frac{1}{\mu'} Y - \varepsilon \left(Y^T \frac{\mu}{\Lambda\mu'} Y' + Y'^T \frac{\mu}{\Lambda\mu'} Y \right)$	$\tan \theta_{13} \approx R^{1/4} \sin \theta_{12}$
$\begin{pmatrix} \Lambda & \mu \\ \mu & \mu' \end{pmatrix}$	$c^{d=5} \approx Y^T \frac{1}{\Lambda} Y - \varepsilon \left(Y^T \frac{\mu}{\Lambda\mu'} Y' + Y'^T \frac{\mu}{\Lambda\mu'} Y \right)$	$\tan \theta_{13} \approx R^{1/4} \sin \theta_{12}$
$\begin{pmatrix} \Lambda & \mu \\ \mu & 0 \end{pmatrix}$	$c^{d=5} \approx \varepsilon \left(Y^T \frac{1}{\mu} Y' + Y'^T \frac{1}{\mu} Y \right)$	$\tan \theta_{13} \approx R^{1/4} \sin \theta_{12}$

TABLE 3.1 – Résultats pour d'autres modèles

8. Cette relation n'est cependant valable que pour $\gamma = 0$. Ce modèle a déjà été étudié dans les articles [57] et [56], dans le cas où :

$$Y = y \begin{pmatrix} 0 & s & c \end{pmatrix} \quad Y' = y' \begin{pmatrix} c' & s'e^{i\phi} & 0 \end{pmatrix}$$

avec $\mu, \mu' < \Lambda, \Omega$. Les coefficients $c^{d=6}$ des différents modèles n'ont pas été inclus dans la Table 3.1, mais on peut voir que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} c^{d=5} \neq 0$ et $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} c^{d=5} \neq 0$ hormis pour le dernier cas, i.e. tous les modèles de la Table 3.1 sauf le dernier ne découplent pas les coefficients $c^{d=5}$ et $c^{d=6}$. C'est dû à la présence du terme proportionnel à $Y^T Y$ dans les coefficients $c^{d=5}$, ce qui veut dire que les masses des neutrinos font intervenir la même combinaison en $Y^T Y$ que dans la matrice ϵ_N . Ils génèrent donc en général une très faible amplitude pour les processus violant la saveur leptonique, et sont donc nettement moins testables. Les coefficients du dernier cas ressemblent cependant très fortement aux coefficients du modèle MFV, mais il faut éviter toute comparaison car ce modèle se rapproche plus d'un modèle avec un seul neutrino droit, puisqu'on suppose $\mu < \Lambda$ et $\epsilon \ll 1$.

Il est remarquable qu'on obtienne approximativement la relation (3.68) dans tous les cas, sauf le premier. En fait, c'est directement lié à la structure particulière de Y . En effet, soit la forme générale pour le coefficient $c^{d=5}$ suivante :

$$c^{d=5} = Y^T A Y + \epsilon \left(Y^T B Y' + Y'^T B Y \right) + \epsilon^2 Y'^T C Y' \quad (3.82)$$

Envisageons alors différents cas.

1. Si $A \neq 0$ et $B \neq 0$, alors on peut faire l'approximation :

$$c^{d=5} \approx Y^T A Y + \epsilon \left(Y^T B Y' + Y'^T B Y \right) \quad (3.83)$$

En posant :

$$Y'' = Y' + \frac{A}{2B\epsilon} Y = y' \begin{pmatrix} \alpha e^{i\phi} \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + \frac{yA}{2B\epsilon} \begin{pmatrix} 0 \\ s \\ c \end{pmatrix} = y' \begin{pmatrix} c\alpha e^{i\phi} \\ \beta + \lambda s \\ \gamma + \lambda c \end{pmatrix} \quad (3.84)$$

où $\lambda = (yA)/(2B\epsilon y')$, on obtient :

$$c^{d=5} \approx \epsilon \left(Y^T B Y'' + Y''^T B Y \right) \quad (3.85)$$

On peut alors calculer les éléments de la matrice U_{PMNS} , notamment :

$$|(U_{PMNS})_{12}| = \frac{\alpha e^{-i\phi}}{N_2} \quad ; \quad |(U_{PMNS})_{13}| = \frac{\alpha e^{-i\phi}}{N_3} \quad (3.86)$$

et comme $N_2/N_3 = R^{1/4}$, on retrouve la relation (3.68).

2. Si $A = 0$ et $B \neq 0$, alors on peut faire l'approximation :

$$c^{d=5} \approx \varepsilon \left(Y^T B Y' + Y'^T B Y \right) \quad (3.87)$$

On retombe dans le cas MMFV, et on retrouve la même relation.

3. Si $A \neq 0$ et $B = 0$, alors si on fait l'approximation :

$$c^{d=5} \approx Y^T A Y \quad (3.88)$$

on trouve $\theta_{13} = 0$ et $\theta_{12} = 0$, ce qui est clairement en contradiction avec les données expérimentales. On doit en fait prendre en compte le terme en ε^2 . Avec la structure générale (3.59), on trouve la relation :

$$\sin \theta_{13} \approx R^{1/2} \tan \theta_{12} \frac{\sin \theta_{23} \beta + \cos \theta_{23} \gamma}{\cos \theta_{23} \beta - \sin \theta_{23} \gamma} \quad (3.89)$$

On ne sait donc à priori pas prédire la valeur de l'angle θ_{13} . Cependant, il est possible dans ce cas d'envisager une structure encore plus minimale pour Y_N qui ne mène pas à des contractions avec les données expérimentales. En effet, si on suppose une structure comme dans [57] :

$$Y = y \begin{pmatrix} 0 & s & c \end{pmatrix} \quad Y' = y' \begin{pmatrix} c' & s' e^{i\phi} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.90)$$

ce qui revient à prendre $\gamma = 0$, on trouve :

$$\tan \theta_{12} = \frac{c'}{s'c} ; \quad \theta_{23} = \theta ; \quad \theta_{13} = \frac{y'^2 C}{y^2 A} s' c' s ; \quad R = \left(\frac{y'^2 C}{y^2 A} \right)^2 (c'^2 + s'^2 c^2)^2 \quad (3.91)$$

On obtient la relation :

$$\theta_{13} \approx \frac{\sqrt{R}}{2} \sin 2\theta_{12} \tan \theta_{23} \approx 0.032 \quad (3.92)$$

Cette prédiction pour θ_{13} est bien en accord avec la borne expérimentale actuelle.

3.2.7 Conclusion sur les modèles minimaux

Si on adjoint à la matrice de masse MFV :

$$M_\nu = \begin{pmatrix} 0 & Y^T & \varepsilon Y'^T \\ Y & \mu' & \Lambda \\ \varepsilon Y' & \Lambda & \mu \end{pmatrix} \quad (3.93)$$

une structure particulière où le premier élément de la matrice Y ou Y' est nul, on obtient une prédiction sur la valeur de l'angle θ_{13} :

$$\tan \theta_{13} = R^{1/4} \sin \theta_{12} \quad \rightarrow \quad \theta_{13} \approx 13.3^\circ \quad (3.94)$$

Cette prédiction est en fait très générique dès qu'on considère seulement deux neutrinos droits et un nombre minimal de paramètres tel qu'il n'y ait pas de contradiction avec les données expérimentales. De plus, elle est particulièrement intéressante puisque les futures expériences sur l'angle θ_{13} , comme Double-Chooz et Daya Bay, devraient prochainement atteindre des sensibilités suffisantes pour confirmer ou réfuter cette prédiction, et ainsi tester ces modèles. Le modèle MMFV avec l'élément nul en Y_1 prédit de plus l'absence des processus rares violant la saveur leptonique impliquant un électron, ainsi que l'existence des processus $\tau \rightarrow \mu\gamma$ et $\tau \rightarrow eee$, dont les rapports de branchement peuvent être tracés en fonction du coefficient de normalisation y et des masses des neutrinos lourds, voir Figure 3.4.

À partir de la matrice de masse des neutrinos légers, on peut reconstruire la structure de Yukawa, mais pas leurs coefficients de normalisation ni la matrice de masse M_N . Cependant, on a vu qu'ils peuvent être déterminés à partir du coefficient $c^{d=6}$ et de la connaissance d'un rapport de processus, dans ce cas $Br(\tau \rightarrow \mu\gamma)/Br(\tau \rightarrow \mu\mu\mu)$.

3.3 Modèle avec trois neutrinos droits

Introduction

La forme générale donnant un découplage entre les coefficients est donnée en (3.2) :

$$M_N = \begin{pmatrix} d & e & f \\ e & \varepsilon_7 & \varepsilon_8 \\ f & \varepsilon_8 & g \end{pmatrix} \quad Y_N = \begin{pmatrix} Y \\ \varepsilon Y' \\ \varepsilon Y'' \end{pmatrix} \quad (3.95)$$

Un calcul rapide nous donne la forme des coefficients $c^{d=5}$ et $c^{d=6}$. Explicitement :

$$c^{d=5} \approx \begin{pmatrix} Y^T & \varepsilon Y'^T & \varepsilon Y''^T \end{pmatrix} \frac{1}{\det M_N} \begin{pmatrix} g\varepsilon_7 - \varepsilon_8^2 & -eg + f\varepsilon_8 & -f\varepsilon_7 + e\varepsilon_8 \\ -eg + f\varepsilon_8 & -f^2 + dg & ef - d\varepsilon_8 \\ -f\varepsilon_7 + e\varepsilon_8 & ef - d\varepsilon_8 & -e^2 + d\varepsilon_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ \varepsilon Y' \\ \varepsilon Y'' \end{pmatrix} \quad (3.96)$$

où :

$$\det M_N = -e^2g - f^2\varepsilon_7 + dg\varepsilon_7 + 2ef\varepsilon_8 - d\varepsilon_8^2 \approx -e^2g \quad (3.97)$$

En ne gardant que les termes dominants, on obtient :

$$\begin{aligned} c^{d=5} &= \varepsilon \left(Y^T \frac{1}{e} Y' + Y'^T \frac{1}{e} Y \right) - Y^T \frac{\varepsilon_7}{e^2} Y + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= \varepsilon \left(Y^T \frac{1}{e} Y' + Y'^T \frac{1}{e} Y \right) + \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon}{e^2}\right) \end{aligned} \quad (3.98)$$

De la même manière, on trouve :

$$c^{d=6} \approx Y^\dagger \frac{1}{e^2} Y + \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon}{e^2}\right) \quad (3.99)$$

La matrice de masse des neutrinos légers est donnée par :

$$m_\nu \approx -\frac{v^2}{2} \varepsilon \left(Y^T \frac{1}{e} Y' + Y'^T \frac{1}{e} Y \right) \quad (3.100)$$

On retrouve donc en première approximation les mêmes coefficients que dans le cas MFV avec deux neutrinos droits. Dans cette section, nous allons analyser une structure particulière de cette matrice de masse qui est en fait une extension directe de modèle MFV avec deux neutrinos droits, que nous appelons "MFV + 1 N".

MFV + 1 N

Si on suppose que le nombre leptonique est une symétrie approximative, alors d et f sont infinitésimaux et les matrices M_N et Y_N deviennent :

$$M_N = \begin{pmatrix} \mu' & \Lambda & \mu \\ \Lambda & \varepsilon_7 & \varepsilon_8 \\ \mu & \varepsilon_8 & \Omega \end{pmatrix} \quad Y_N = \begin{pmatrix} Y \\ \varepsilon Y' \\ \varepsilon Y'' \end{pmatrix} \quad (3.101)$$

On peut diagonaliser cette matrice de la même manière que précédemment. On obtient dans un premier temps, en appliquant la formule (2.7) introduite au début du chapitre 2 :

$$U_N = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{3 \times 3} & \frac{v}{\sqrt{2\Lambda}} \varepsilon Y'^{\dagger} & \frac{v}{\sqrt{2\Lambda}} Y^{\dagger} & \frac{v}{\sqrt{2\Omega}} \varepsilon Y'' \\ -\frac{v}{\sqrt{2\Lambda}} \varepsilon Y' & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{v}{\sqrt{2\Lambda}} Y & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{v}{\sqrt{2\Omega}} \varepsilon Y'' & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon}{\Lambda^2}, \frac{\varepsilon}{\Lambda\Omega}, \frac{\varepsilon}{\Omega^2}\right) \quad (3.102)$$

Après renormalisation des champs, elle devient, au même ordre :

$$U_1 = U_N (U_N^{\dagger} U_N)^{-1/2} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{3 \times 3} - \frac{\epsilon_N}{2} & \frac{v}{\sqrt{2\Lambda}} \varepsilon Y'^{\dagger} & \frac{v}{\sqrt{2\Lambda}} Y^{\dagger} & \frac{v}{\sqrt{2\Omega}} \varepsilon Y'' \\ -\frac{v}{\sqrt{2\Lambda}} \varepsilon Y' & 1 - \frac{\epsilon'_N}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{v}{\sqrt{2\Lambda}} Y & 0 & 1 - \frac{\epsilon''_N}{2} & 0 \\ -\frac{v}{\sqrt{2\Omega}} \varepsilon Y'' & 0 & 0 & 1 - \frac{\epsilon'''_N}{2} \end{pmatrix} \quad (3.103)$$

où :

$$\epsilon_N = \frac{v^2}{2} \left(Y^{\dagger} \frac{1}{\Lambda^2} Y \right) + \frac{v^2}{2} \varepsilon^2 \left(Y'^{\dagger} \frac{1}{\Lambda^2} Y' + Y''^{\dagger} \frac{1}{\Omega^2} Y'' \right) \approx \frac{v^2}{2} \left(Y^{\dagger} \frac{1}{\Lambda^2} Y \right) \quad (3.104)$$

$$\epsilon'_N = \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon^2}{\Lambda^2}\right) \quad ; \quad \epsilon''_N = \frac{v^2}{2} \left(Y \frac{1}{\Lambda^2} Y^{\dagger} \right) \quad ; \quad \epsilon'''_N = \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon^2}{\Omega^2}\right) \quad (3.105)$$

La matrice de masse s'exprime alors :

$$M'_\nu = \begin{pmatrix} m_\nu & 0 \\ 0 & M_N \end{pmatrix} + \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon}{\Lambda^2}\right) \quad (3.106)$$

On va alors diagonaliser de manière approximative la matrice M_N . On applique pour cela :

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & S & 0 \\ 0 & -S & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.107)$$

où $C = \cos \varphi$, $S = \sin \varphi$ et :

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctan \left[\frac{-2\Lambda}{\mu' - \epsilon_7} \right] \quad (3.108)$$

Puis, appliquons :

$$U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.109)$$

La matrice de masse devient alors :

$$M''_\nu = \begin{pmatrix} m_\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{N1} & 0 & C\mu - S\epsilon_8 \\ 0 & 0 & M_{N2} & S\mu + C\epsilon_8 \\ 0 & C\mu - S\epsilon_8 & S\mu + C\epsilon_8 & \Omega \end{pmatrix} + \mathcal{O}\left(\frac{\epsilon}{\Lambda^2}\right) \quad (3.110)$$

où :

$$M_{N1} \approx \Lambda - \frac{1}{2}(\mu' + \epsilon_7) \quad (3.111)$$

$$M_{N2} \approx \Lambda + \frac{1}{2}(\mu' + \epsilon_7) \quad (3.112)$$

Ensuite, on applique :

$$U_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{(C\mu - S\epsilon_8)^*}{M_{N1}} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{(S\mu + C\epsilon_8)^*}{M_{N2}} \\ 0 & -\frac{C\mu - S\epsilon_8}{M_{N1}} & -\frac{S\mu + C\epsilon_8}{M_{N2}} & 1 \end{pmatrix} \quad (3.113)$$

pour finalement obtenir la matrice de masse diagonale, à l'ordre $\mathcal{O}(\epsilon/\Lambda)$:

$$M_\nu^D = \begin{pmatrix} m_\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{N1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{N2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{N3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} m_\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda - \frac{1}{2}(\mu' + \epsilon_7) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda + \frac{1}{2}(\mu' + \epsilon_7) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Omega \end{pmatrix} \quad (3.114)$$

La matrice U_4 est approximativement unitaire, à l'ordre $\mathcal{O}(\mu/M_{Ni}^2, \epsilon/M_{Ni}^2)$. La renormalisation des champs de manière à avoir des termes cinétiques diagonaux n'a pas d'influence, à l'ordre considéré, sur la matrice de changement de base finale $U = U_1 U_2 U_3 U_4$. Celle-ci

s'exprime approximativement, à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon/M_{N_i}^2)$:

$$U \approx \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{3 \times 3} - \frac{\varepsilon_N}{2} & \frac{-iv}{\sqrt{2}\Lambda} (S Y^\dagger - C \varepsilon Y'^\dagger) & \frac{v}{\sqrt{2}\Lambda} (C Y^\dagger + S \varepsilon Y'^\dagger) & \frac{v}{\sqrt{2}\Omega} \varepsilon Y'' \\ -\frac{v}{\sqrt{2}\Lambda} \varepsilon Y' & C & S & 0 \\ -\frac{v}{\sqrt{2}\Lambda} Y & -S \left(1 - \frac{\varepsilon_N''}{2}\right) & C \left(1 - \frac{\varepsilon_N''}{2}\right) & 0 \\ -\frac{v}{\sqrt{2}\Omega} \varepsilon Y'' & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.115)$$

Ce cas est donc très similaire au cas général MFV, et fournit en fait approximativement les mêmes prédictions. C'est tout à fait normal car le troisième neutrino droit se couple faiblement aux deux autres, puisqu'au travers des paramètres μ et ε_8 . Il n'a donc presque pas d'influence ni sur la masse des neutrinos légers, ni sur la phénoménologie.

4 Conclusion et perspectives

Le mécanisme Seesaw Type-I constitue une extension minimale très séduisante du Modèle Standard. De manière simple, ce mécanisme peut expliquer naturellement la faible masse des neutrinos ainsi que l'asymétrie matière-antimatière de l'univers via le mécanisme de leptogenèse, et il ouvre la voie à une nouvelle physique. Malheureusement, il reste spéculatif, dans le sens où on n'a actuellement aucune preuve de sa validité. En effet, ils font en général soit intervenir de la nouvelle physique à une échelle très haute, inatteignable expérimentalement, soit, si cette échelle est plus basse, ils couplent au Modèle Standard de manière très supprimée.

En particulier, les matrices de masse des neutrinos générées par les modèles Seesaw sont, en toute généralité, proportionnelles aux couplages de Yukawa Y et inversement proportionnelles à l'échelle \mathcal{M} de la nouvelle physique. Si la faible masse des neutrinos provient de la grande valeur de \mathcal{M} , alors les processus rares qui pourraient être engendrés par la nouvelle physique sont en général d'autant plus supprimés. De même, si elle provient des petites valeurs des couplages de Yukawa Y , alors les processus rares sont aussi fortement supprimés, bien que l'échelle de la nouvelle physique peut ne pas être beaucoup plus grande que l'échelle électrofaible. Il semble donc que la faible masse des neutrinos ne permette pas l'observation de processus rares, pourtant cruciaux pour pouvoir distinguer le modèle original.

Cependant, il existe des modèles Seesaw Type-I, avec une structure particulière basée sur une symétrie approximative du nombre leptonique, permettant de grands coefficients $c^{d=6}$, auxquels les processus violant la saveur sont proportionnels, tout en générant de faibles masses pour les neutrinos. Ces modèles, dits "Seesaw Inverses", sont particulièrement intéressants car riches en prédictions.

Dans ce contexte, nous avons analysé le modèle Minimal Flavor Violation qui est un modèle Seesaw Inverse faisant intervenir deux neutrinos droits, ce qui n'est pas exclu par les données observationnelles. Nous avons montré qu'il prédit des résultats remarquables sur la prédiction des rapports de processus comme $Br(\mu \rightarrow e\gamma)/Br(\mu Ti \rightarrow e Ti)$, qui dépendent notamment du logarithme des masses M_N des neutrinos lourds. C'est d'autant plus intéressant que des expériences sur ces processus sont justement en cours de

préparation, et devraient pouvoir atteindre des sensibilités records. Ainsi, l'observation à l'expérience MEG du processus $\mu \rightarrow e\gamma$ contredirait la borne actuelle sur $Br(\mu Ti \rightarrow e Ti)$ et mettrait donc ce modèle à mal. De même, la découverte du processus $\mu \rightarrow e$ *conversion* à l'expérience PRISM permettrait de fournir une prédiction sur le rapport de branchement du processus $\mu \rightarrow e\gamma$. De plus, ces prédictions sur les rapport de processus étant différentes de celles des autres modèles Seesaw, il est possible de différencier les trois types de modèles Seesaw à partir de ces rapports.

Par ailleurs, nous avons montré qu'il est possible, dans le cas du modèle MFV, de reconstruire les paramètres de la théorie complète à haute énergie à partir de la connaissance des coefficients $c^{d=5}$ et $c^{d=6}$ de la théorie effective à basse énergie, et d'un rapport de processus. En effet, la connaissance des coefficients $c^{d=5}$ et $c^{d=6}$ ne suffit pas car ils ne permettent pas de reconstruire l'échelle de masse M_N des neutrinos lourds. Mais comme les rapports de processus dépendent logarithmiquement de M_N , la mesure d'un de ces rapport déterminerait M_N et il serait donc possible de reconstruire tous les paramètres du Lagrangien complet Seesaw Type-I.

Ensuite, nous avons montré qu'il est possible de restreindre encore plus le nombre de paramètres du modèle MFV, sans être en contradiction avec les bornes expérimentales actuelles sur les paramètres de mélange, en imposant une structure particulière des couplages de Yukawa. Nous avons appelé ce modèle "Most Minimal Flavor Violation". Nous avons montré que sa principale prédiction, $\tan \theta_{13} = R^{1/4} \sin \theta_{12}$, pourra être testée dans un futur proche grâce par exemple aux expériences Double-Chooz et Daya Bay. Il n'y a pas à notre connaissance de modèle plus minimal en terme de nombre de paramètres qui mène à des taux observables de processus changeant la saveur. De plus, il donne une prédiction qui est en fait très générique. En effet, nous avons montré qu'elle est en première approximation commune à la plupart des modèles avec deux neutrinos droits et une telle structure pour les couplages de Yukawa.

Pour finir, nous avons envisagé un modèle avec trois neutrinos droits, basé aussi sur une symétrie approximative du nombre leptonique. Il semble fournir les mêmes prédictions que le modèle MFV. Cependant, une analyse plus affinée est nécessaire avant toute affirmation hâtive. Il serait également intéressant d'étudier la phénoménologie d'autres modèles avec trois neutrinos droits, comme ceux proposés dans [56], qui fournissent par ailleurs d'autres relations entre observables.

Notons qu'un projet de recherche intéressant serait de recalculer minutieusement le rapport de branchement du processus $\mu - e$ *conversion* dans le cas des modèles Seesaw Type-I. Nous avons en effet relevé des contradictions dans plusieurs articles et, avec les expériences inédites qui se profilent, il semble indispensable d'avoir une expression correcte pour ce rapport de branchement.

Bibliographie

- [1] C. L. Cowan, F. Reines, F. B. Harrison, H. W. Kruse, and A. D. McGuire. Detection of the free neutrino : A Confirmation. *Science*, 124 :103–104, 1956.
- [2] G. Danby et al. Observation of High-Energy Neutrino Reactions and the Existence of Two Kinds of Neutrinos. *Phys. Rev. Lett.*, 9 :36–44, 1962.
- [3] K. Kodama et al. Observation of tau-neutrino interactions. *Phys. Lett.*, B504 :218–224, 2001.
- [4] K Nakamura et al. Review of particle physics. *J. Phys.*, G37 :075021, 2010.
- [5] J. Charles et al. CP violation and the CKM matrix : Assessing the impact of the asymmetric B factories. *Eur. Phys. J.*, C41 :1–131, 2005.
- [6] Y. Fukuda et al. Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos. *Phys. Rev. Lett.*, 81 :1562–1567, 1998.
- [7] Q.R. Ahmad et al. Measurement of the rate of $\nu_e + d \rightarrow p + p + e^-$ interactions produced by B-8 solar neutrinos at the Sudbury Neutrino Observatory. *Phys.Rev.Lett.*, 87 :071301, 2001.
- [8] K. Eguchi et al. First results from KamLAND : Evidence for reactor anti-neutrino disappearance. *Phys.Rev.Lett.*, 90 :021802, 2003.
- [9] M. H. Ahn et al. Indications of Neutrino Oscillation in a 250 km Long- baseline Experiment. *Phys. Rev. Lett.*, 90 :041801, 2003.
- [10] Palash B. Pal Rabindra N. Mohapatra. *Massive Neutrinos in Physics and Astrophysics - Third Edition*. World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 2004.
- [11] M. Apollonio et al. Limits on neutrino oscillations from the CHOOZ experiment. *Phys.Lett.*, B466 :415–430, 1999.
- [12] Th.A. Mueller, D. Lhuillier, M. Fallot, A. Letourneau, S. Cormon, et al. Improved Predictions of Reactor Antineutrino Spectra. *Phys.Rev.C*, 2011.
- [13] G. Mention, M. Fechner, Th. Lasserre, Th.A. Mueller, D. Lhuillier, et al. The Reactor Antineutrino Anomaly. 2011.
- [14] Thomas Schwetz, Mariam Tortola, and J.W.F. Valle. Global neutrino data and recent reactor fluxes : status of three-flavour oscillation parameters. 2011.
- [15] M.C. Gonzalez-Garcia, Michele Maltoni, and Jordi Salvado. Updated global fit to three neutrino mixing : status of the hints of $\theta_{13} > 0$. *JHEP*, 1004 :056, 2010.
- [16] Joachim Kopp, Michele Maltoni, and Thomas Schwetz. Are there sterile neutrinos at the eV scale? 2011. * Temporary entry *

- [17] Thomas Thummler and for the KATRIN Collaboration. Introduction to direct neutrino mass measurements and KATRIN. 2010.
- [18] M. Shiraishi, K. Ichikawa, K. Ichiki, N. Sugiyama, and M. Yamaguchi. Constraints on neutrino masses from WMAP5 and BBN in the lepton asymmetric universe. *JCAP*, 0907 :005, 2009.
- [19] R. Wendell et al. Atmospheric neutrino oscillation analysis with sub-leading effects in Super-Kamiokande I, II, and III. *Phys. Rev.*, D81 :092004, 2010.
- [20] Ch. Kraus et al. Final Results from phase II of the Mainz Neutrino Mass Search in Tritium β Decay. *Eur. Phys. J.*, C40 :447–468, 2005.
- [21] V. M. Lobashev et al. Direct search for mass of neutrino and anomaly in the tritium beta-spectrum. *Phys. Lett.*, B460 :227–235, 1999.
- [22] R. Arnold et al. First results of the search of neutrinoless double beta decay with the NEMO 3 detector. *Phys. Rev. Lett.*, 95 :182302, 2005.
- [23] H. V. Klapdor-Kleingrothaus et al. Latest Results from the Heidelberg-Moscow Double Beta Decay Experiment. *Eur. Phys. J.*, A12 :147–154, 2001.
- [24] C. E. Aalseth et al. Recent results of the IGEX Ge-76 double-beta decay experiment. *Phys. Atom. Nucl.*, 63 :1225–1228, 2000.
- [25] E. Andreotti et al. ^{130}Te Neutrinoless Double-Beta Decay with CUORICINO. 2010.
- [26] K. Assamagan, C. Bronnimann, M. Daum, H. Forrer, R. Frosch, et al. Upper limit of the muon-neutrino mass and charged pion mass from momentum analysis of a surface muon beam. *Phys.Rev.*, D53 :6065–6077, 1996.
- [27] R. Barate et al. An Upper limit on the tau-neutrino mass from three-prong and five-prong tau decays. *Eur.Phys.J.*, C2 :395–406, 1998.
- [28] A. Melchiorri, P. Serra, S. Dodelson, and A. Slosar. New constraints on neutrino masses from cosmology. *New Astron.Rev.*, 50 :1020–1024, 2006.
- [29] A. Abada, C. Biggio, F. Bonnet, M. B. Gavela, and T. Hambye. Low energy effects of neutrino masses. *JHEP*, 12 :061, 2007.
- [30] Ernest Ma. Pathways to naturally small neutrino masses. *Phys.Rev.Lett.*, 81 :1171–1174, 1998.
- [31] A. Broncano, M.B. Gavela, and Elizabeth Ellen Jenkins. Neutrino physics in the seesaw model. *Nucl.Phys.*, B672 :163–198, 2003.
- [32] Samoil Bilenky. Introduction to the physics of massive and mixed neutrinos. *Lect.Notes Phys.*, 817 :1–255, 2010.
- [33] Kai Zuber. *Neutrino Physics*. Taylor and Francis Group, 2004.
- [34] A. Ilakovac and A. Pilaftsis. Flavor violating charged lepton decays in seesaw-type models. *Nucl. Phys.*, B437 :491, 1995.
- [35] Ara Ioannisian and Apostolos Pilaftsis. Cumulative nondecoupling effects of Kaluza-Klein neutrinos in electroweak processes. *Phys.Rev.*, D62 :066001, 2000.
- [36] Apostolos Pilaftsis and Thomas E.J. Underwood. Electroweak-scale resonant leptogenesis. *Phys.Rev.*, D72 :113001, 2005.
- [37] Amon Ilakovac and Apostolos Pilaftsis. Supersymmetric Lepton Flavour Violation in Low-Scale Seesaw Models. *Phys.Rev.*, D80 :091902, 2009.

BIBLIOGRAPHIE

- [38] Frank F. Deppisch and Apostolos Pilaftsis. Lepton Flavour Violation and $\theta(13)$ in Minimal Resonant Leptogenesis. *Phys.Rev.*, D83 :076007, 2011.
- [39] F. Deppisch, T.S. Kosmas, and J.W.F. Valle. Enhanced $\mu \rightarrow e$ conversion in nuclei in the inverse seesaw model. *Nucl.Phys.*, B752 :80–92, 2006.
- [40] Gui-jun Ding and Mu-Lin Yan. LFV $\mu \rightarrow e \gamma$ and μ -e Conversion in Unparticle Physics. 2007.
- [41] Y.G. Cui et al. Conceptual design report for experimental search for lepton flavor violating $\mu \rightarrow e$ conversion at sensitivity of 10^{-16} with a slow-extracted bunched proton beam (COMET). 2009.
- [42] J. Adam et al. A limit for the $\mu \rightarrow e \gamma$ decay from the MEG experiment. *Nucl. Phys.*, B834 :1–12, 2010.
- [43] M. L. Brooks et al. New Limit for the Family-Number Non-conserving Decay $\mu \rightarrow e \gamma$. *Phys. Rev. Lett.*, 83 :1521–1524, 1999.
- [44] U. Bellgardt et al. Search for the Decay $\mu \rightarrow e^+ e^- e^-$. *Nucl.Phys.*, B299 :1, 1988.
- [45] Bernard Aubert et al. Searches for Lepton Flavor Violation in the Decays $\tau \rightarrow e \gamma$ and $\tau \rightarrow \mu \gamma$. *Phys. Rev. Lett.*, 104 :021802, 2010.
- [46] Y. Miyazaki et al. Search for Lepton Flavor Violating τ Decays into Three Leptons. *Phys. Lett.*, B660 :154–160, 2008.
- [47] Bernard Aubert et al. Improved limits on the lepton-flavor violating decays $\tau \rightarrow l+l-$. *Phys. Rev. Lett.*, 99 :251803, 2007.
- [48] C. Dohmen et al. Test of lepton flavor conservation in μ to e conversion on titanium. *Phys.Lett.*, B317 :631–636, 1993.
- [49] Wilhelm H. Bertl et al. A Search for muon to electron conversion in muonic gold. *Eur.Phys.J.*, C47 :337–346, 2006.
- [50] W. Honecker et al. Improved limit on the branching ratio of μ to e conversion on lead. *Phys.Rev.Lett.*, 76 :200–203, 1996.
- [51] B. O’Leary et al. SuperB Progress Reports - Physics. 2010.
- [52] Ed V. Hungerford. COMET/PRISM muon to electron conversion at J-PARC. *AIP Conf.Proc.*, 1182 :694–697, 2009.
- [53] R.M. Carey et al. Proposal to search for $\mu \rightarrow e \gamma$ with a single event sensitivity below 10^{-16} . 2008. Spokespersons : J.P. Miller, R.H. Bernstein.
- [54] A. Broncano, M.B. Gavela, and Elizabeth Ellen Jenkins. The Effective Lagrangian for the seesaw model of neutrino mass and leptogenesis. *Phys.Lett.*, B552 :177–184, 2003.
- [55] M. B. Gavela, T. Hambye, D. Hernandez, and P. Hernandez. Minimal Flavour Seesaw Models. *JHEP*, 09 :038, 2009.
- [56] Riccardo Barbieri, Thomas Hambye, and Andrea Romanino. Natural relations among physical observables in the neutrino mass matrix. *JHEP*, 0303 :017, 2003.
- [57] M. Raidal and A. Strumia. Predictions of the most minimal seesaw model. *Phys.Lett.*, B553 :72–78, 2003.
- [58] P.H. Frampton, S.L. Glashow, and T. Yanagida. Cosmological sign of neutrino CP violation. *Phys.Lett.*, B548 :119–121, 2002.

- [59] A. Abada, C. Biggio, F. Bonnet, M. B. Gavela, and T. Hambye. μ to e γ and τ to l γ decays in the fermion triplet seesaw model. *Phys. Rev.*, D78 :033007, 2008.
- [60] Steve Blanchet, Thomas Hambye, and Francois-Xavier Josse-Michaux. Reconciling leptogenesis with observable $\mu \rightarrow e$ γ rates. *JHEP*, 04 :023, 2010.
- [61] E.W. Otten and C. Weinheimer. Neutrino mass limit from tritium beta decay. *Rept.Prog.Phys.*, 71 :086201, 2008.
- [62] J. Argyriades et al. Measurement of the Double Beta Decay Half-life of ^{150}Nd and Search for Neutrinoless Decay Modes with the NEMO-3 Detector. *Phys. Rev.*, C80 :032501, 2009.
- [63] H.C. Chiang, E. Oset, T.S. Kosmas, A. Faessler, and J.D. Vergados. Coherent and incoherent (μ^- , e^-) conversion in nuclei. *Nucl.Phys.*, A559 :526–542, 1993.
- [64] T. Suzuki, David F. Measday, and J.P. Roalsvig. Total Nuclear Capture Rates for Negative Muons. *Phys.Rev.*, C35 :2212, 1987.
- [65] P. Adamson et al. A Study of Muon Neutrino Disappearance Using the Fermilab Main Injector Neutrino Beam. *Phys. Rev.*, D77 :072002, 2008.
- [66] J.A. Casas, J.R. Espinosa, and I. Hidalgo. Implications for new physics from fine-tuning arguments. 1. Application to SUSY and seesaw cases. *JHEP*, 0411 :057, 2004.

Annexes

A Conjugaison de charge

Sous l'opération de conjugaison de charge \mathcal{C} , un champ se transforme comme :

$$\psi^c(t, x) \equiv \mathcal{C}\psi(t, x)\mathcal{C}^\dagger = \gamma_0 C \psi^*(x) e^{i\alpha_c} \quad (\text{A.1})$$

où ψ^c est le conjugué de charge du champ ψ . C est la matrice de conjugaison de charge et possède les propriétés suivantes, indépendantes de la représentation :

$$C^\dagger = C^{-1} \quad (\text{A.2})$$

$$C^T = -C \quad (\text{A.3})$$

$$C^{-1}\gamma_\mu C = -\gamma_\mu^T \quad (\text{A.4})$$

et :

$$(\psi^c)^c = \psi \quad (\text{A.5})$$

$$\overline{\psi^c} = \psi^T C^{-1} \quad (\text{A.6})$$

$$(\psi_L)^c = (\psi^c)_R \quad (\text{A.7})$$

On a donc, par exemple, les relation suivantes :

$$\overline{(\psi^c)_L} (\psi^c)_R = \overline{\psi}_L \psi_R \quad (\text{A.8})$$

$$\overline{(\psi^c)_R} \gamma_\mu (\psi^c)_R = -\overline{\psi}_L \gamma_\mu \psi_L \quad (\text{A.9})$$

Dans la représentation de Dirac, $C = i\gamma_2\gamma_0$. Pour un champ de Majorana, on demande :

$$\psi(x) = e^{i\alpha} \psi^c(x) \quad (\text{A.10})$$

C'est-à-dire qu'une particule de Majorana est sa propre antiparticule à une phase près, et est vecteur propre de \mathcal{C} . α est appelée phase de Majorana.

B Diagrammes de Feynman des processus $l \rightarrow l' \gamma$, $l \rightarrow l' l' l'$ et $\mu N - e N$

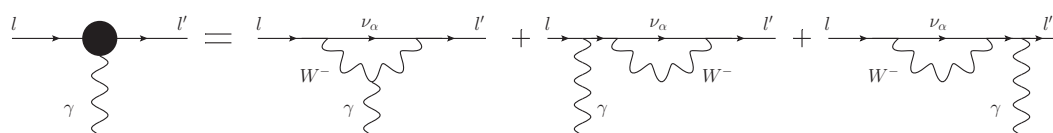


FIGURE B.1 – Diagrammes de Feynman du processus $l \rightarrow l' \gamma$.

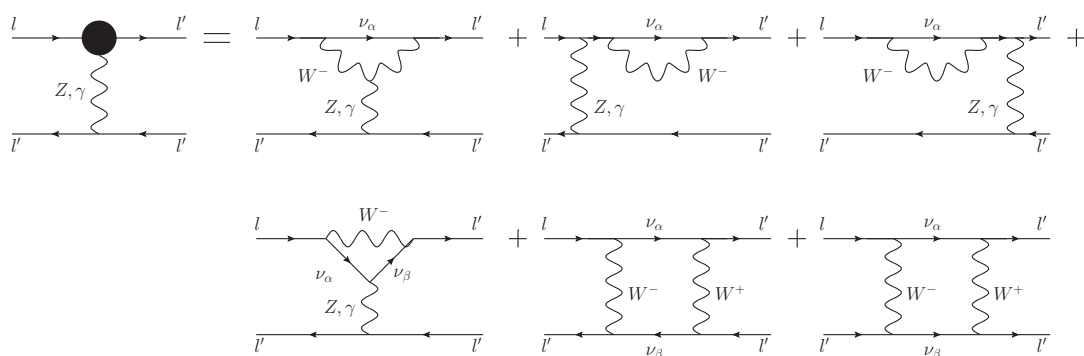


FIGURE B.2 – Diagrammes de Feynman du processus $l \rightarrow l' l' l'$.

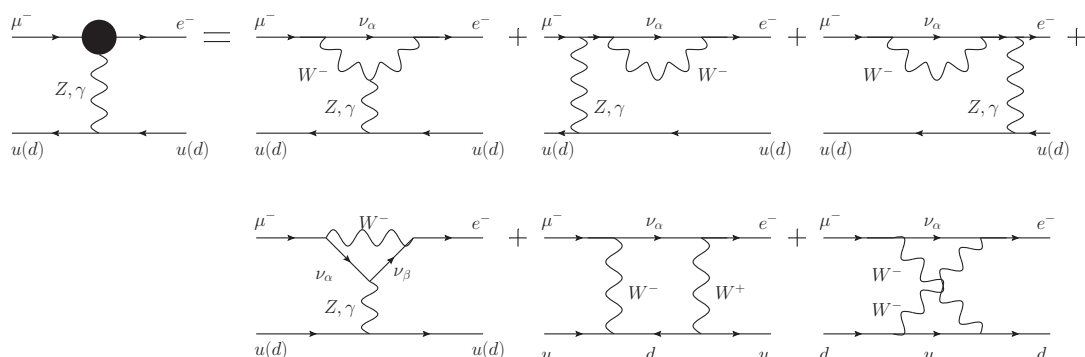


FIGURE B.3 – Diagrammes de Feynman du processus $\mu - e \text{ conv.}$

C Expressions des facteurs de formes

Soit les fonctions :

$$F_\gamma(x) = \frac{7x^3 - x^2 - 12x}{12(1-x)^3} - \frac{x^4 - 10x^3 + 12x^2}{6(1-x)^4} \ln x \quad (\text{C.1})$$

$$G_\gamma(x) = -\frac{2x^3 + 5x^2 - x}{4(1-x)^3} - \frac{3x^3}{2(1-x)^4} \ln x \quad (\text{C.2})$$

$$F_Z(x) = -\frac{5x}{2(1-x)} - \frac{5x^2}{2(1-x)^2} \ln x \quad (\text{C.3})$$

$$G_Z(x, y) = -\frac{1}{2(x-y)} \left[\frac{x^2(1-y)}{1-x} \ln x - \frac{y^2(1-x)}{1-y} \ln y \right] \quad (\text{C.4})$$

$$H_Z(x, y) = \frac{\sqrt{xy}}{4(x-y)} \left[\frac{x^2 - 4x}{1-x} \ln x - \frac{y^2 - 4y}{1-y} \ln y \right] \quad (\text{C.5})$$

$$F_{Box}(x, y) = \frac{1}{x-y} \left[\left(1 + \frac{xy}{4}\right) \left(\frac{1}{1-x} + \frac{x^2 \ln x}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-y} - \frac{y^2 \ln y}{(1-y)^2} \right) \right] \quad (\text{C.6})$$

$$-2xy \left(\frac{1}{1-x} + \frac{x \ln x}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-y} - \frac{y \ln y}{(1-y)^2} \right) \quad (\text{C.7})$$

$$G_{Box}(x, y) = -\frac{\sqrt{xy}}{x-y} \left[(4 + xy) \left(\frac{1}{1-x} + \frac{x \ln x}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-y} - \frac{y \ln y}{(1-y)^2} \right) \right] \quad (\text{C.8})$$

$$-2 \left(\frac{1}{1-x} + \frac{x^2 \ln x}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-y} - \frac{y^2 \ln y}{(1-y)^2} \right) \quad (\text{C.9})$$

Pour $x \gg 1$, nous avons les approximations suivantes :

$$F_\gamma(x) \approx -\frac{7}{12} - \frac{1}{6} \ln x \quad (\text{C.10})$$

$$G_\gamma(x) \approx 1/2 \quad (\text{C.11})$$

$$F_Z(x) \approx \frac{5}{2} - \frac{5}{2} \ln x \quad (\text{C.12})$$

$$G_Z(x, x) \approx -\frac{x}{2} + \ln x \quad ; \quad G_Z(0, x) \approx \frac{1}{2} \ln x \quad ; \quad G_Z(0, 0) = 0 \quad (\text{C.13})$$

$$H_Z(x, x) \approx \frac{3}{4} - \frac{x}{4} - \frac{1}{4} x \ln x \quad ; \quad H_Z(0, x) = 0 \quad ; \quad H_Z(0, 0) = 0 \quad (\text{C.14})$$

$$F_{Box}(x, x) \approx \frac{x}{4} + \frac{3}{2} \ln x \quad ; \quad F_{Box}(0, x) \approx 0 \quad ; \quad F_{Box}(0, 0) = 0 \quad (\text{C.15})$$

$$G_{Box}(x, x) \approx -2x + x \ln x \quad ; \quad G_{Box}(0, x) = 0 \quad ; \quad G_{Box}(0, 0) = 0 \quad (\text{C.16})$$

Les facteurs de formes s'expriment :

$$F_\gamma^{ll'} = \sum_i B_{li}^* B_{l'i} F_\gamma(\lambda_i) = \sum_{N_i} B_{lN_i}^* B_{l'N_i} F_\gamma(\lambda_{N_i}) \quad (\text{C.17})$$

$$G_\gamma^{ll'} = \sum_i B_{li}^* B_{l'i} G_\gamma(\lambda_i) = \sum_{N_i} B_{lN_i}^* B_{l'N_i} G_\gamma(\lambda_{N_i}) \quad (\text{C.18})$$

$$F_Z^{ll'} = \sum_{ij} B_{li}^* B_{l'j} \left[\delta_{ij} F_Z(\lambda_i) + C_{ij}^* G_Z(\lambda_i, \lambda_j) + C_{ij} H_Z(\lambda_i, \lambda_j) \right] \quad (\text{C.19})$$

$$= \sum_{N_i N_j} B_{lN_i}^* B_{l'N_j} \left[\delta_{N_i N_j} (F_Z(\lambda_{N_i}) + 2G_Z(0, \lambda_{N_i})) \right] \quad (\text{C.20})$$

$$+ C_{N_i N_j}^* (G_Z(\lambda_{N_i}, \lambda_{N_j}) - G_Z(0, \lambda_{N_i}) - G_Z(0, \lambda_{N_j})) \quad (\text{C.21})$$

$$+ C_{N_i N_j} H_Z(\lambda_{N_i}, \lambda_{N_j}) \quad (\text{C.22})$$

$$F_{Box}^{ll'l_1 l_2} = \sum_{ij} B_{li}^* B_{l_2 j}^* (B_{l'i} B_{l_1 j} + B_{l_1 i} B_{l'j}) F_{Box}(\lambda_{N_i}, \lambda_{N_j}) \quad (\text{C.23})$$

$$+ \sum_{ij} B_{li}^* B_{l_2 i}^* B_{l'j} B_{l_1 j} G_{Box}(\lambda_{N_i}, \lambda_{N_j}) \quad (\text{C.24})$$

$$= \sum_{N_i N_j} \left[(B_{lN_i}^* B_{l'N_i} \delta_{l_1 l_2} + B_{lN_i}^* B_{l_1 N_i} \delta_{l_2 l_1}) \delta_{N_i N_j} [F_{Box}(0, \lambda_{N_i}) - F_{Box}(0, 0)] \right] \quad (\text{C.25})$$

$$+ B_{lN_i}^* B_{l_2 N_j}^* (B_{l'N_i} B_{l_1 N_j} + B_{l_1 N_i} B_{l'N_j}) \left[F_{Box}(\lambda_{N_i}, \lambda_{N_j}) - F_{Box}(0, \lambda_{N_j}) \right] \quad (\text{C.26})$$

$$- F_{Box}(0, \lambda_{N_i}) + F_{Box}(0, 0) \left. + B_{lN_i}^* B_{l_2 N_i}^* B_{l'N_j} B_{l_1 N_j} G_{Box}(\lambda_{N_i}, \lambda_{N_j}) \right] \quad (\text{C.27})$$

où $\lambda_{N_i} = M_{N_i}^2 / M_W^2$. La dernière égalité est obtenue en utilisant l'unitarité de la matrice U , et :

$$B_{i\kappa} = \sum_{k=1}^n V_{Lki}^{e*} U_{k\kappa} \quad (\text{C.28})$$

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n U_{ki} U_{kj}^* \quad (\text{C.29})$$

Pour le processus $\mu - e$ conversion :

$$F_{Box}^{\mu e u u} = \sum_{N_i} B_{\mu N_i}^* B_{e N_i} [F_{Box}(0, \lambda_{N_i}) - F_{Box}(0, 0)] \quad (\text{C.30})$$

$$F_{Box}^{\mu e d d} = \sum_{N_i} B_{\mu N_i}^* B_{e N_i} [F_{Box}(0, \lambda_{N_i}) - F_{Box}(0, 0)] \quad (\text{C.31})$$

$$\begin{aligned} & + B_{\mu N_i}^* B_{e, N_i} |V_{td}|^2 [F_{Box}(\lambda_t, \lambda_{N_i}) - F_{Box}(0, \lambda_{N_i}) - F_{Box}(0, \lambda_t) + F_{Box}(0, 0)] \\ & \approx F_{Box}^{\mu e u u} \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

où $\lambda_t = m_t^2/M_W^2$, m_t est la masse du quark top et $|V_{td}| \approx 0.01$ est un élément de matrice CKM.

D Relations trigonométriques

Si :

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan x \quad (\text{D.1})$$

alors :

$$c^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) \quad (\text{D.2})$$

$$s^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) \quad (\text{D.3})$$

$$s c = \frac{x}{2\sqrt{1+x^2}} \quad (\text{D.4})$$

Si $x \gg 1$ alors :

$$c^2 \approx \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{x} \right) + \mathcal{O}(x^{-3}) \quad (\text{D.5})$$

$$s^2 \approx \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x} \right) + \mathcal{O}(x^{-3}) \quad (\text{D.6})$$

$$s c \approx \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2x^2} \right) + \mathcal{O}(x^{-2}) \quad (\text{D.7})$$

Si $x \ll 1$ alors :

$$c^2 \approx 1 - \frac{x^2}{4} + \mathcal{O}(x^4) \quad (\text{D.8})$$

$$s^2 \approx \frac{x^2}{4} + \mathcal{O}(x^4) \quad (\text{D.9})$$

$$s c \approx \frac{x}{2} + \mathcal{O}(x^3) \quad (\text{D.10})$$

Soit :

$$x = \frac{-2A}{B-C} \quad (\text{D.11})$$

Alors l'équation suivante est satisfaite :

$$cs(B-C) + (c^2 - s^2)A = 0 \quad (\text{D.12})$$

Table des figures

1.1	Détermination du nombre de neutrinos légers à partir de la largeur de désintégration du boson Z.	3
1.2	Anomalie dans le flux d'antineutrinos émis par les réacteurs [13]. Les résultats expérimentaux sont comparés aux prédictions, calculées avec le nouveau flux. La courbe supérieure correspond à une solution avec trois neutrinos et $\sin^2(2\theta_{13}) = 0.06$. La courbe inférieure correspond à une solution avec un quatrième neutrino.	11
1.3	Hiérarchies normale et inverse	13
1.4	Fin du spectre β du tritium [20]. Les courbes discontinues correspondent au cas $m(\nu_e) = 0$ et la courbe pleine à $m(\nu_e) = 10 \text{ eV}/c^2$	13
1.5	Diagramme de Feynman du processus $\beta\beta 0\nu$, proportionnel à l'entrée m_{ee} de la matrice des masses des neutrinos.	13
1.6	Récapitulatif des différents types de mécanismes Seesaw avec la matrice de masse des neutrinos qu'ils génèrent. On a représenté les diagrammes de Feynman illustrant la génération de l'opérateur de Weinberg pour les trois mécanismes Seesaw : Type-I, Type-II et Type-III. Comme L_L et ϕ sont des doublets sous $SU(2)_L$, l'opérateur de Weinberg ne peut être induit par le simple échange d'une particule que si celle-ci est singlet ou triplet sous $SU(2)_L$, ce qui mène à ces trois options.	18
2.1	Théorie effective de Fermi	28
2.2	Deux premières corrections de la théorie effective du modèle Seesaw Type-I.	29
3.1	Prédictions du modèle MFV sur les rapports de branchement $\frac{Br(\mu \rightarrow e\gamma)}{Br(\tau \rightarrow e\gamma)}$ et $\frac{Br(\mu \rightarrow e\gamma)}{Br(\tau \rightarrow \mu\gamma)}$ issus de l'article [29]. Les lignes continues et discontinues correspondent à $\delta = 0$ et $\delta = \pi/2$ respectivement.	48

TABLE DES FIGURES

3.2	Prédictions sur les rapports de branchement de différents processus. Respectivement, $Br(l \rightarrow l'\gamma) = \frac{\Gamma(l \rightarrow l'\gamma)}{\Gamma_l}$, $Br(l \rightarrow l_1 l_2 l_3) = \frac{\Gamma(l \rightarrow l_1 l_2 l_3)}{\Gamma_l}$ et $Br_{\mu e}(N, Z) = \frac{\Gamma[\mu(N, Z) \rightarrow e(N, Z)]}{\Gamma[\mu(N, Z) \rightarrow \text{capture}]}$. Les pics dans les quatre premières figures sont dû à la croissance plus rapide du facteur de forme du rapport de branchement $Br(l \rightarrow l'\gamma)$ par rapport aux facteurs de forme des rapports de branchement $Br(l \rightarrow l_1 l_2 l_3)$ et $Br_{\mu e}(N, Z)$, jusqu'aux alentours de $M_N \approx 100$ GeV et $M_N \approx 700$ GeV respectivement. Au-delà, le rapport de branchement $Br(l \rightarrow l'\gamma)$ diminue sa croissance jusqu'à devenir constant pour $M_N \gtrsim 1$ TeV, alors que les rapports $Br(l \rightarrow l_1 l_2 l_3)$ et $Br_{\mu e}(N, Z)$ augmentent logarithmiquement.	49
3.3	Prédictions du modèle MFV, cas général, sur différents rapports de branchement.	55
3.4	Prédictions sur les rapports de branchement $Br(\tau \rightarrow \mu\gamma)$ et $Br(\tau \rightarrow \mu\mu\mu)$ en fonction de M_N et y . Les zones exclues par les limites expérimentales actuelles sur les rapports de branchement sont représentées par les zones claires.	59
B.1	Diagrammes de Feynman du processus $l \rightarrow l'\gamma$	77
B.2	Diagrammes de Feynman du processus $l \rightarrow l'l'l'$	77
B.3	Diagrammes de Feynman du processus $\mu - e$ conv.	77

Liste des tableaux

1.1	Limites expérimentales sur les masses de neutrinos	13
2.1	Valeurs des paramètres Z_{eff} , $ F(-m_\mu^2) $ et $\Gamma_{capt.}$ pour différents noyaux . . .	27
2.2	Limites expérimentales supérieures de différents rapports de branchement, définis par $Br(l \rightarrow l'\gamma) = \frac{\Gamma(l \rightarrow l'\gamma)}{\Gamma_l}$, $Br(l \rightarrow l_1 l_2 l_3) = \frac{\Gamma(l \rightarrow l_1 l_2 l_3)}{\Gamma_l}$ et $Br_{\mu e} = \frac{\Gamma[\mu(N,Z) \rightarrow e(N,Z)]}{\Gamma[\mu(N,Z) \rightarrow capture]}$	27
2.3	Sensibilités attendues sur les rapports de branchement de futures expériences. Les rapports sont définis comme dans la Table 2.2.	28
2.4	Coefficients $c^{d=5}$ et $c^{d=6}$ des théories Seesaw Type-I, II et III.	32
2.5	Comptage des paramètres du Lagrangien Seesaw Type-I	33
2.6	Comptage des paramètres du Lagrangien effectif	34
3.1	Résultats pour d'autres modèles	60